

Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В.

**Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация
производственных систем в условиях неопределенности:
технология, экономика, экология**

М.: «Издательство Машиностроение – 1», 2004.

Монография посвящена моделированию и оптимизации реальных процессов с учетом неопределенностей. Проблемы формулируются на основе синтеза концепций теории нечетких множеств и прикладного и интервального анализа, значительно расширяющих возможности учета неопределенностей различной природы, неизбежно сопутствующих математическому описанию реальности. Такой подход позволяет решать задачи совершенствования функционирования производственных систем в условиях неполноты и неточности информации о протекающих процессах, недостаточности и недостоверности знаний, при наличии субъективности оценок.

В книге сконцентрирован многолетний опыт авторов в разработке моделей и методик оптимизации в различных отраслях, прямо или опосредованно связанных производственной деятельностью. Практически все рассмотренные в книге конкретные результаты внедрены в практику работы производственных предприятий, финансовых организаций и органов управления различного уровня.

Книга предназначена для широкого круга читателей – системных аналитиков, специалистов по управлению и инженеров, исследователей, экономистов, финансистов, экологов, занимающихся комплексными проблемами совершенствования и оптимизации технологических и производственно-экономических процессов; для лиц, интересующихся современными направлениями теории управления, системного анализа, моделирования сложных систем; для аспирантов, студентов старших курсов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. **ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И МЕТОДЫ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА - СОВРЕМЕННЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ОПЕРИРОВАНИЯ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ**
 - 1.1. Основные положения теории нечетких множеств и теории возможностей
 - 1.1.1. Определение нечетких множеств
 - 1.1.2. Основные операции с нечеткими множествами
 - 1.1.3. Степень нечеткости
 - 1.1.4. Нечеткие и случайные события
 - 1.2. Нечеткость, возможность, вероятность: методологические проблемы взаимосвязи и разграничения
 - 1.3. Основы прикладного интервального анализа
 - 1.4. Взаимосвязь проблем арифметики нечетких чисел и интервального анализа
 - 1.5. Операции сравнения четких и нечетких интервалов
 - 1.5.1. Традиционные методы сравнения четких и нечетких интервалов
 - 1.5.2. Теоретико-вероятностный подход к формализации отношений в классах четких и нечетких интервалов
 - 1.6. Двухкритериальный подход к сравнению интервалов в задачах оптимизации
2. **ПРОБЛЕМЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ В СВЕТЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ**
 - 2.1. Математическая формализация частных критериев с помощью функций принадлежности (желательности)
 - 2.1.1. Частные критерии на основе показателей качества, представленных числами
 - 2.1.2. Частные критерии в форме функций принадлежности при наличии интервальных и нечетко-интервальных аргументов
 - 2.1.3. Гипернечеткие частные критерии
 - 2.2. Агрегирование частных критериев
 - 2.2.1. Ранжирование частных критериев в условиях неопределенности
 - 2.2.2. Проблема формирования обобщенного критерия
 - 2.2.3. Построение иерархических систем обобщенных критериев
 - 2.3. Многокритериальная оптимизация
 - 2.3.1. Постановка задач многокритериальной оптимизации в условиях нестатистической неопределенности

2.3.2. Многоэкстремальность и проблема устойчивости оптимума

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Структурно-параметрическая идентификация

3.1.1. Принципы построения детерминированных математических моделей и их редукции

3.1.2. Построение глобального критерия качества математических моделей

3.1.3. Обобщенная формулировка задачи структурно-параметрической идентификации и пример ее реализации

3.2. Моделирование и многокритериальная оптимизация процесса нагрева стальных слитков под прокатку

3.3. Многокритериальная оптимизация процесса термообработки проката

3.4 Структурно-параметрическая идентификация процесса горячей прокатки алюминиевых сплавов

3.5. Многокритериальная оптимизация непрерывной горячей прокатки алюминиевых сплавов

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВ

4.1. Оптимизация при наличии интервальных и нечетко интервальных функций

4.2. Базовая методика нечеткой оптимизации параллельной работы энергоагрегатов, использующих комбинированное топливо

4.3. Постановка задачи оптимизации работы совокупности энергоагрегатов в условиях неопределенности

4.4. Математическая модель функционирования энергоагрегатов

4.5. Оптимизация совместной работы энергоагрегатов в условиях неопределенности

5. ИНТЕРВАЛЬНАЯ И НЕЧЕТКО-ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА В ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

5.1. Методологические проблемы использования четких и нечетких интервалов для представления неопределенных параметров моделей

5.2. Моделирование и оптимизация обеспечения предприятия сырьем из нескольких источников

5.3. Нечеткая имитационная модель процесса производства строительных материалов

6. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕХНОГЕННЫХ ПОСЛЕДСТВИЙ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИРОДООХРАННОЙ, ОЗДОРОВИТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

6.1. Многокритериальные оценки качества воздушной среды и состояния здоровья населения в областном центре

6.2. Оптимизация регионального бюджета природоохранной, оздоровительной деятельности

7. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

7.1. Многокритериальные оценки качества коммерческих контрактов

7.1.1. Основные проблемы оценки качества контрактов

7.1.2. Методики многокритериальной и многоуровневой оценки качества контрактов в условиях неопределенности

7.2. Многокритериальные оценки качества промышленной продукции

7.3. Многокритериальные и многоуровневые оценки социально-экономического состояния регионов

7.4. Математическое моделирование и многокритериальная оптимизация финансовых параметров инвестиций в условиях нестатистической неопределенности

7.4.1. Проблемы анализа эффективности и риска инвестиций с использованием интегральных показателей

7.4.2. Нечетко-интервальная оценка чистого приведенного дохода и финансового риска инвестиций

7.4.3. Нечетко-интервальный расчет внутренней нормы окупаемости и связанного с ее оценкой финансового риска

7.4.4. Многокритериальная оптимизация инвестиционных проектов в условиях неопределенности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ВВЕДЕНИЕ

Название книги начинается со слова *моделирование*. Речь идет о математическом моделировании, причем моделировании целевом. Можно утверждать, что моделирование всегда имеет целевой характер, даже когда единственной целью является удовлетворение собственного любопытства. Из названия книги следует, что речь пойдет о моделировании процессов, непосредственно связанных с практической производственной деятельностью людей. Поэтому в нашей ситуации цель моделирования можно обобщенно сформулировать как получение информации, облегчающей процессы принятия адекватных решений в различных сферах производственной деятельности. Этим мы хотим подчеркнуть, что окончательные решения всегда принимают люди. Отметим, что на протяжении веков они довольно успешно делали это без каких-либо математических моделей. Хотя модель в виде определенного плана всегда формируется на уровне сознания (или может быть даже подсознания) прежде, чем человек начинает какие-либо конкретные действия.

Поэтому математические модели в прикладных отраслях должны строиться не только с точки зрения наиболее адекватного отражения сущности моделируемых процессов и явлений, но и с учетом особенностей мышления человека, его конкретных целей (несколько иные требования предъявляются к моделям, используемым в системах автоматического управления, однако проблемы автоматизации в данной книге не рассматриваются).

Поскольку принятие решения всегда направлено на разрешение некоторых проблем, процесс моделирования можно укрупненно представить в виде следующей последовательности действий:

- осознание наличия проблемы;
- выделение главных факторов, определяющих проблему, которые должны служить выходными параметрами модели;
- выделение определяющих входных переменных модели;
- собственно разработка математической модели;
- идентификация модели (параметрическая или структурно-параметрическая);
- проведение численных экспериментов с моделью и при необходимости статистическая обработка полученных данных;
- определение состава параметров качества, характеризующих решаемую проблему (с использованием данных моделирования и априорной информации);

- формализация частных критериев качества на основе параметров качества;
- определение параметров, характеризующих относительную значимость частных критериев для решения общей проблемы;
- формализация обобщенного критерия качества решения проблемы на основе агрегирования частных критериев с учетом их относительной значимости;
- решение задачи выбора наилучшей альтернативы или многокритериальной оптимизации в зависимости от типа решаемой проблемы.

Представленная последовательность решения проблем с помощью математического моделирования не претендует на полноту и всеобщность. В сущности, она является некоторой детализацией общепринятой схемы: формулировка проблемы; построение модели и идентификация; оптимизация. В то же время представленная детализация общей схемы достаточно полно отражает последовательность действий, которой авторы придерживались при решении конкретных проблем в различных отраслях деятельности.

Следует подчеркнуть, что во многих реальных случаях решение проблем не требует построения конструктивной математической модели, адекватно описывающей все стороны исследуемого процесса или явления. Так, решение проблем принятия решений может сводиться к этапам анализа априорной информации и данных, полученных от экспертов, определения состава показателей качества и выбора наилучшей альтернативы из возможных. В этом случае также строятся модели, при этом они формализуют только указанные этапы и их можно условно называть моделями оптимизации или принятия решений. Отметим, что такие модели зачастую оказываются весьма сложными и требуют использования глубоких, современных математических методов для своей реализации.

Для иллюстрации рассмотрим следующий, на первый взгляд, простейший бытовой пример. Одному из авторов книги привелось пару месяцев читать лекции в одном иностранном государстве. Работа занимала большую часть дня, и это обстоятельство послужило причиной того, что меню этого автора состояло в основном из цыплят, запеченных в гриле (весьма дешевых и, что наиболее важно, обеспечивающих и обед, и ужин). Поскольку бытие все же в какой-то мере определяет сознание, автора заинтересовала проблема оптимизации приготовления цыплят. Основным фактором, почти целиком определяющим успех всего предприятия, оказалось время приготовления τ . От этого параметра качества напрямую зависели три основных частных критерия: вкус цыпленка $\mu_1(\tau)$, затраты электроэнергии на приготовление и время ожидания клиента в очереди $\mu_q(\tau)$. Проблемой является выбор оптимального по совокупности частных критериев времени приготовления.

Для умозрительной формализации частных критериев были применены функции желательности Харрингтона, широко применяемые в планировании экспериментов при поиске оптимальных условий [3]. Функции желательности изменяются от 0 в областях недопустимых

(нежелательных) значений показателя качества до максимального значения, равного 1, в областях наиболее предпочтительных его значений. Других ограничений, кроме непрерывности и выпуклости, на функции желательности не налагается.

Из этих предпосылок экономический критерий затрат на энергию можно охарактеризовать функцией желательности $\mu_e(\tau)$, приведенной на рисунке 1. В соответствии с ней при $\tau < \tau_1$ затраты энергии представляются для фирмы несущественным. С дальнейшим ростом τ растут затраты энергии, что отражается в уменьшении значений функции желательности до 0 при $\tau = \tau_8$. При $\tau > \tau_8$ производство становится нерентабельным ввиду слишком больших затрат на энергию.

Поведение функции желательности, формализующей критерий ожидания клиента в очереди $\mu_q(\tau)$, соответствует тому, что при $\tau < \tau_2$ практически все клиенты готовы подождать приготовления пищи. С дальнейшим ростом τ все больше клиентов покидает очередь, поскольку хватает конкурирующих фирм, и при $\tau > \tau_5$ клиенты считают время ожидания недопустимым.

Форма функции желательности критерия вкуса цыпленка $\mu_f(\tau)$ определяется следующими соображениями. При $\tau < \tau_3$ цыпленок будет сыроват. С ростом τ его вкусовые качества растут, и в интервале $\tau_4 < \tau < \tau_6$ цыпята наиболее вкусны с точки зрения большинства клиентов. При $\tau > \tau_6$ цыпята уже несколько суховаты, хотя находится достаточное число любителей именно поджаристых цыплят. При $\tau > \tau_7$ цыпята становятся подгоревшими, и не находят покупателей.

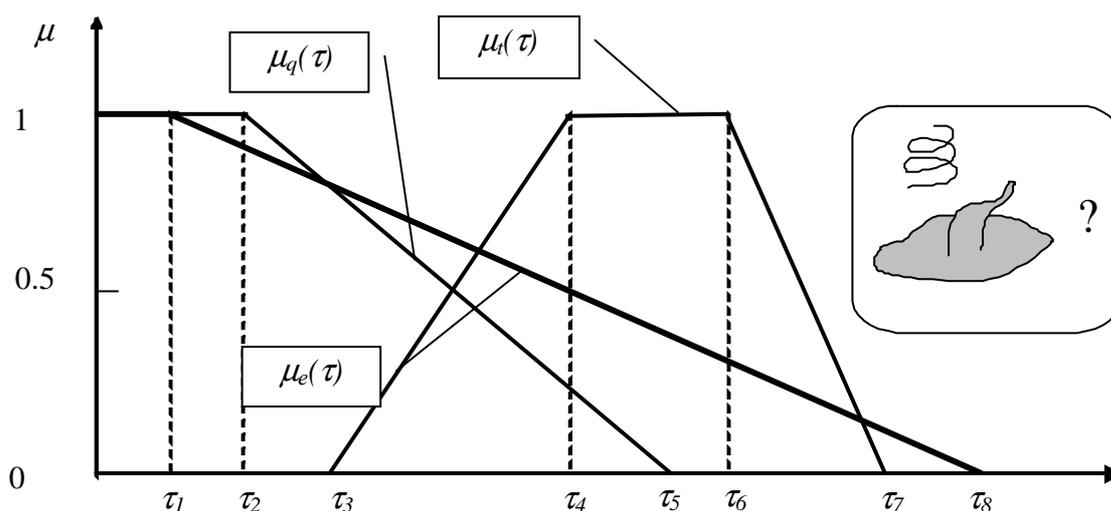


Рис 1. Частные критерии качества процесса приготовления цыплят: $\mu_e(\tau)$, $\mu_q(\tau)$, $\mu_f(\tau)$ - функции желательности, описывающие критерии затрат электроэнергии, времени ожидания клиента в очереди и вкусовых качеств продукции, соответственно

Полученные на основе вышеприведенных умозрительных соображений функции желательности обладают существенно различными чертами. В принципе, критерий $\mu_e(\tau)$ можно построить на основе объективных данных финансового анализа. Критерий $\mu_q(\tau)$ - можно сконструировать на основе некоторых статистических данных. В отличие от них критерий $\mu_c(\tau)$ основан, в основном, на субъективных оценках вкуса и вида поджаренных цыплят. Причем, в рассматриваемой ситуации именно субъективный критерий «вкус продукта» играет определяющую роль в успехе торгового предприятия. Исключение этого критерия из рассмотрения из-за его «субъективности» в данном случае сделало бы постановку задачи оптимизации работы пищевого предприятия практически бессмысленной.

Другим источником субъективизма при оценке работы предприятия является наличие нескольких частных критериев, являющихся антагонистичными. Улучшение с точки зрения критерия $\mu_c(\tau)$ сопровождается одновременным ухудшением относительно критериев $\mu_e(\tau)$ и $\mu_q(\tau)$ (рис.1). Эта ситуация, как правило, имеет характер общей закономерности. Как указывается в [22], наличие в постановке задачи оптимизации хотя бы двух частных критериев неизбежно сопровождается привнесением в нее неопределенностей несогласованной, субъективной природы.

Следующими источниками субъективной неопределенности в рассматриваемом примере являются необходимость количественной оценки коэффициентов относительной важности частных критериев (ранжировка), а также выбор способа их агрегирования в обобщенный критерий качества.

Заканчивая рассмотрение нашего примера, отметим, что вес цыпленка является, вообще говоря, случайной переменной с соответствующим частотным распределением. Ясно, что время приготовления цыпленка должно зависеть от его веса, что делает необходимым одновременный учет в постановке задачи как субъективной, так и объективной (в данном случае статистической) неопределенностей. В итоге рассмотренная простейшая, на первый взгляд, бытовая проблема оказывается весьма сложной для разрешения с помощью формальных математических подходов.

Рассмотренный пример хорошо иллюстрирует основные особенности постановки задач оптимизации при разрешении реальных проблем: многокритериальность; антагонистичность и неравнозначность частных критериев; важность учета критериев, основанных на субъективных оценках; необходимость одновременного учета неопределенностей различной природы. Во многих случаях дополнительной сложностью является иерархичность системы частных критериев.

В этом модельном примере также видны комплексность и многоаспектность проблем моделирования и оптимизации при постановке и решении реальных задач. Эта ситуация носит

общий характер. Решение проблем оптимизации производственной деятельности непосредственно связано с моделированием и анализом технологических процессов, экономических показателей эффективности, а также с учетом техногенного воздействия промышленных производств на экологию окружающей среды. Экологические факторы напрямую влияют на здоровье населения, а вся совокупность комплексных показателей деятельности на качество жизни в целом. Эту систему взаимозависимых производственно-технологических, экономических и экологических факторов можно наглядно представить укрупненной структурной схемой, приведенной на рисунке 2. Она отражает взаимосвязь задач и проблем, рассматриваемых в настоящей книге.

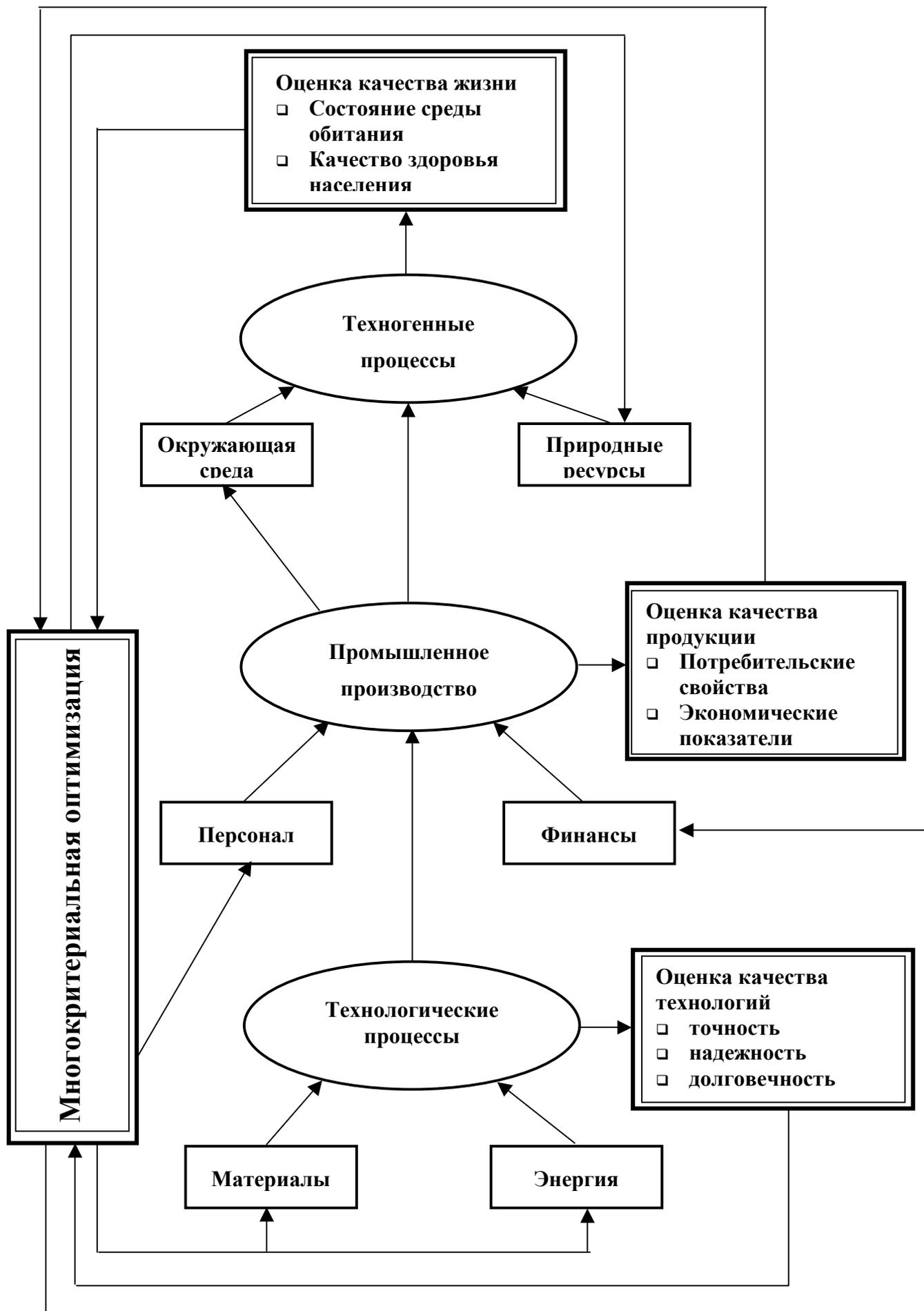


Рис.2. Структурное представление проблем системной оценки качества и многокритериальной оптимизации производственной деятельности

В первой главе приведены основные положения теории нечетких множеств, теории возможностей, прикладного интервального анализа в объеме, необходимом для понимания постановок задач, рассмотренных в последующих главах. Рассмотрены важные методологические проблемы взаимосвязи и разграничения нечеткости, возможности и вероятности. Показана глубокая взаимосвязь интервальной и нечетко-интервальной математики. Впервые во всей полноте представлена оригинальная, основанная на теоретико-вероятностном подходе, методика сравнения четких и нечетких интервалов (чисел), в дальнейшем широко используемая в задачах моделирования и оптимизации в условиях неопределенности. Даны краткие характеристики ряда других современных методов оперирования с неопределенностями, которые представляются весьма перспективными для практического использования.

Вторая глава посвящена проблемам многокритериальности. Рассмотрены методы формализации частных критериев с помощью функций принадлежности нечетким множествам, в том числе зависящих от интервальных и нечетко-интервальных аргументов. Введено новое, важное в практических приложениях понятие гипернечеткого множества, предложены процедуры построения частных критериев качества на основе гипернечетких функций принадлежности.

Описана методика ранжировки частных критериев на основе лингвистических матриц их парных сравнений, а также расширение методики для случая нечетко-интервальных матриц парных сравнений. Проанализирована проблема агрегирования частных критериев, описаны достоинства и недостатки различных вариантов построения обобщенного критерия качества. Предложена методика агрегирования иерархических систем частных критериев. Описана обобщенная постановка задач нечеткой многокритериальной оптимизации. Особое внимание уделено важным для практики проблемам многоэкстремальности и устойчивости оптимума.

В третьей главе рассмотрены проблемы моделирования и оптимизации технологических процессов. В начале главы изложены методологические принципы построения и редукции адекватных детерминированных математических моделей технологических процессов, ориентированных на использование в задачах оптимизации. Рассмотрена обобщенная постановка задачи структурно-параметрической идентификации детерминированных моделей, описана методика решения этой задачи, представленной в форме задачи многокритериальной оптимизации по совокупности критериев точности и физической достоверности модели.

Далее приведены конкретные примеры использования разработанных методик для совершенствования технологических процессов в металлургии. Рассмотрены задачи моделирования и многокритериальной оптимизации нагрева слитков под прокатку,

термообработки стального проката, задача структурно-параметрической идентификации моделей процесса горячей прокатки алюминиевых сплавов и задача многокритериальной оптимизации этого процесса методом нечеткого динамического программирования.

Четвертая глава посвящена проблеме моделирования и оптимизации режимов работ энергоагрегатов в условиях неопределенности. Описана базовая методика нечеткой оптимизации на примере параллельной работы двух энергоагрегатов, использующих комбинированное топливо (газ и жидкое топливо). Поставлена общая задача нечеткой оптимизации работы совокупности энергоагрегатов, использующих комбинированное топливо в условиях неопределенности. Рассмотрены вопросы математической формализации технико-экономических критериев оптимизации работы энергоагрегатов. Подробно описана математическая модель совместного функционирования энергоагрегатов, приведены постановка и результаты решения задачи нечеткой оптимизации совместной работы энергоагрегатов ТЭЦ.

В пятой главе описаны методологические проблемы и результаты применения интервального анализа и нечетко-интервальной математики в имитационном моделировании производственных систем. Приведен пример многокритериальной нечетко-интервальной оптимизации на основе нечетко-интервальной имитационной модели (оптимизация обеспечения предприятия сырьем из нескольких источников). Рассмотрен пример нечетко-интервального имитационного моделирования процесса производства строительных материалов.

Шестая глава посвящена вопросам многокритериальной оценки техногенных последствий производственной деятельности, анализа влияния её на загрязнение окружающей среды и состояние здоровья населения. Представлена методика оценки и многокритериальной оптимизации качества воздушной среды в областном центре при учете ее влияния на состояние здоровья населения и наличии ограничений финансового характера.

В седьмой главе рассмотрены проблемы математического моделирования, многокритериальной оценки и оптимизации технико-экономических систем при наличии антагонистических критериев. С использованием конкретных примеров рассмотрены задачи многокритериальной и многоуровневой оценки качества коммерческих контрактов, а также качества промышленной продукции в условиях неопределенности. Представлены методика многокритериальной и многоуровневой оценки социально-экономического состояния регионов. Рассмотрены примеры математического моделирования и многокритериальной оптимизации финансовых параметров инвестиций в условиях нестатистической неопределенности.

Г Л А В А I

ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И МЕТОДЫ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА–СОВРЕМЕННЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ОПЕРИРОВАНИЯ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

Понимание необходимости разработки эффективного математического аппарата для работы с неопределенностями, в том числе и субъективной природы, осознание недостатков теоретико-вероятностных методов, привело к бурному развитию и формированию в последние 30 лет ряда новых научных дисциплин: интервальной математики, теории нечетких множеств, теории возможностей и теории свидетельств Демпстера-Шефера [187, 299], частными случаями которой являются аксиоматики теории возможностей и классической теории вероятностей. Эти направления не отрицают, а обобщают традиционные представления. В работе [318] также показано, что теория вероятностей является частным случаем теории возможностей. В свою очередь математической основой последней является теория нечетких множеств.

Весьма перспективной для математической формализации неопределенностей представляется также теория приближенных (грубых) множеств Павлака [276], которая позволяет на основе итоговых экспертных оценок о состоянии системы и объективных или субъективных оценках ее параметров строить алгоритмы прогнозирования на основе процедур логического вывода. В приложениях успешно используются подходы на основе теорий приближенных и нечетких множеств [170]. Эффективными на практике оказываются методы моделирования, построенные на основе теории недоопределенных множеств [91-93], претендующей, в определенной степени, на методологическое обобщение существующих подходов к анализу и формализации неопределенностей.

В настоящее время постепенно становится ясным, какие подходы, в каких ситуациях и в каких сочетаниях нужно использовать. Весь этот комплекс новых теорий и методов (включая классическую теорию вероятностей) движется к естественному объединению в общую теорию анализа неопределенностей.

Процесс этот не завершен и из всего многообразия новых теорий и методов оперирования с неопределенностями наибольшее распространение в практических приложениях получили методы теории нечетких множеств (и связанной с ней теории возможностей) и прикладного интервального анализа.

§ 1.1. Основные положения теории нечетких множеств и теории возможностей

Основоположником теории нечетких множеств в современной трактовке является Л. А. Заде, заложивший ее основы в статье [338].

Отметим, что, согласно данным работы [208], идея построения нечетких множеств появилась в связи с исследованием известного античного «парадокса кучи» в трудах Е. Бореля еще в 1959 г., т. е. за 15 лет до Л. А. Заде. Однако, именно благодаря Л. А. Заде теория приобрела математически формализованный вид.

До появления аппарата теории нечетких множеств любая неопределенность, появляющаяся при решении практических задач, отождествлялась со случайностью. В то же время в повседневной жизни мы часто используем такие понятия, как *большой*, *малый*, *хороший*, *простой*, *сложный*, *горячий* и т. д., которые являются нечеткими, расплывчатыми, однако эта неопределенность не носит вероятностного характера. Теория нечетких множеств разработана для оперирования с такого рода объектами. Случайность всегда связана с неопределенностью, касающейся принадлежности некоторого объекта к вполне четкому множеству. Понятие же нечеткости относится к классам, в которых имеются различные градации степени принадлежности, промежуточные между полной принадлежностью и не принадлежностью объектов к данному классу. Иными словами, нечеткое множество есть класс объектов, в котором нет резкой границы между теми объектами, которые входят в этот класс, и теми, которые в него не входят.

Рассмотрим следующий пример.

В соответствии с официальными нормативами количество гемоглобина Hb в крови здоровых детей может изменяться в пределах от 100 до 160 г/л (диапазон нормы). Такой норматив можно представить в виде четкого множества (рис. 1.1), описываемого характеристической функцией

$$\eta(Hb) = \begin{cases} 0, & Hb \leq 100, Hb \geq 160 \\ 1, & 100 < Hb < 160 \end{cases}$$

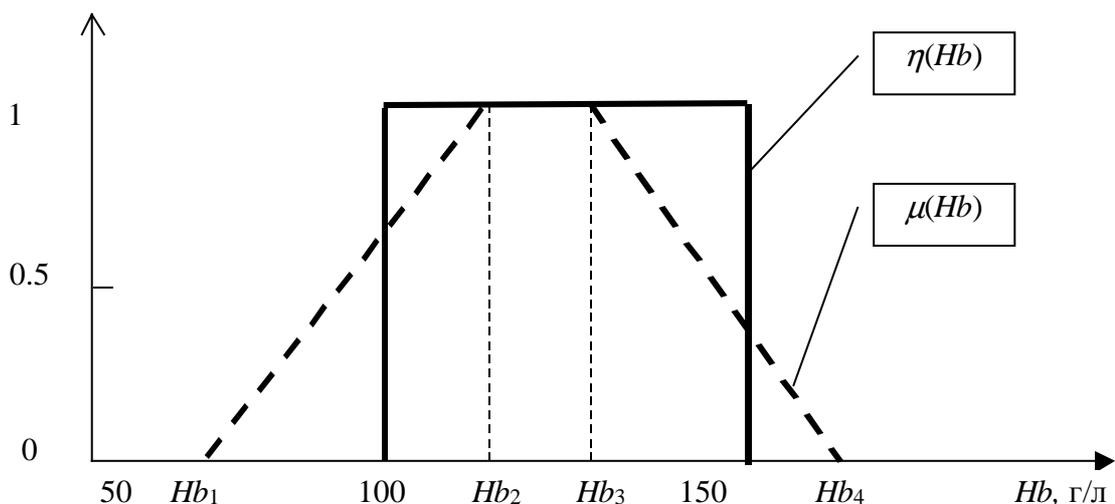


Рис. 1.1. Характеристическая функция норматива Hb и функция принадлежности нечеткому множеству «Здоровых детей»

В то же время на практике использование такого жесткого норматива затруднительно. Действительно, как должен поступать практикующий врач, если в результате анализа получит $Hb = 102$ или $Hb = 98$? В соответствии с нормативом, в первом случае ребенка следует признать здоровым, а во втором лечить его от анемии. Ясно, что это противоречит реальной практике. Общение со специалистами-гематологами показало, что на самом деле они имеют представления о некоторой области гарантированной нормы (интервал $[Hb_2, Hb_3]$ на рис.1.1) и областях гарантированной патологии $Hb < Hb_1$ и $Hb > Hb_4$. Промежуточные, или как их называют медики «серые зоны», характеризуют состояния, промежуточные между здоровьем и нездоровьем. Описанную ситуацию можно представить (рис. 1.1) в виде функции принадлежности $\mu(Hb)$ нечеткому множеству здоровых (с точки зрения содержания Hb) детей. Полученная функция принадлежности $\mu(Hb)$ нечеткому множеству изменяется в интервале от 0 до 1 и естественным образом обобщает характеристическую функцию $\mu(Hb) - \eta(Hb)$. Ясно, что подобный подход к построению нечетких множеств не требует теоретико-вероятностной интерпретации.

Следует отметить, что первоначально теория нечетких множеств была откровенно негативно оценена научной общественностью. Наиболее критически воспринималась явная направленность теории на оперирование с субъективными неопределенностями. В конце 60-х годов работы Л. Заде даже были рассмотрены в Конгрессе США как яркий пример бессмысленной траты государственных средств, выделяемых на развитие науки [335].

В настоящее время теория нечетких множеств является развитым научным направлением, имеющим большое прикладное значение. Она широко применяется в решении технических проблем. На ее основе получены решения большого числа задач анализа и управления энергетическими системами [226], технологическими процессами и установками: химическими реакторами [173, 216, 246, 283], электрическими двигателями [241, 253], процессами сварки [268, 281], установками для очищения воды [156], холодильными агрегатами [163, 213], вентиляторами и кондиционерами [304, 312], нагревательными приборами [221], печами для сжигания мусора [154, 206, 275] и плавки стекла [158, 225], металлообрабатывающими станками [227], бойлерами [168], аккумуляторными агрегатами [154], системами коммуникации [291, 307], автомобильным транспортом [155].

Расширяется использование теории нечетких множеств в экономике и управлении предприятиями. Об этом свидетельствует интенсивный рост в этой области исследований числа журнальных публикаций, появление монографий обобщающего характера [66, 239, 144, 172], а также специализированного международного журнала «Fuzzy Economic Review», международной организации «International Association for Fuzzy-Set Management and Economy».

В настоящее время опубликовано много книг посвященных теории нечетких множеств [66, 144, 155, 156, 167, 172, 175, 191, 192, 210, 228, 232 - 237, 239, 240, 245, 242, 243, 248, 272, 286, 303, 309, 332, 333, 347], с ее использованием разработано и внедрено большое число готовых программ для решения задач нечеткого моделирования и управления [236, 245, 159, 306, 249, 247]. При этом следует отметить, что в рамках единой методологии существуют различные подходы к формулировке основ теории нечетких множеств и, особенно, математических операций с нечеткими данными.

Изложим основные положения теории и подходов, непосредственно используемых в настоящей книге.

1.1.1. Определение нечетких множеств

Пусть $X = \{x\}$ - множество (конечное или бесконечное), которое будем называть универсальным множеством. Тогда нечеткое множество A в X есть совокупность упорядоченных пар $A = \{x, \mu_A(x)\}$, где $\mu_A(x)$ – функция, представляющая собой степень принадлежности x к A ; $\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]$.

Если справедливо $\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$, то нечеткое множество называется нормальным.

Функция принадлежности $\mu_A(x)$ является обобщением понятия характеристической функции обычного множества, поскольку переходит в нее в предельном случае, когда содержит лишь две точки 0 и 1, т. е. когда множество четкое. В дальнейшем для описания нечеткого множества будем использовать запись $A = \{\mu_A(x)/x_i\}$, если X конечно, и $A = \int \mu_A(x)/x$, если X имеет мощность континуума.

Важное практическое [274] и методологическое значение [23] имеет вопрос об определении $\mu_A(x)$. В статье [5] дано, по сути дела, частотное определение функции принадлежности. При отсутствии статистики $\mu_A(x)$ предлагается оценивать как распределение субъективной вероятности в смысле [110]. Близкий подход изложен в работе [72]. Для аксиоматизации построения нечетких множеств используется теория полумножеств [273], в статье [189] с этой целью применена бесконечнозначная логика Лукасевича. Автор работы предложил определять функцию принадлежности по множеству ее уровней. В работе [150] для определения функции принадлежности предлагается итерационный алгоритм согласования экспертных оценок. В обзорной статье [211] предложено несколько способов определения функции принадлежности. Предпочтение отдано методу семантической дифференциации. Отмечено, что указанный подход с успехом применяется на практике. Во всех рассмотренных работах явно или неявно полагается, что сами функции принадлежности или информация для их построения задаются экспертами на основе субъективных предпочтений, т. е., вообще говоря, не носят случайного характера.

1.1.2. Основные операции с нечеткими множествами

Одним из центральных вопросов теории нечетких множеств является определение операций пересечения и объединения. В настоящее время нет единого мнения о том, как определять операции пересечения и объединения нечетких множеств, и существуют различные варианты определений. Согласно [190], сначала следует постулировать желаемые свойства операций, а затем должно быть показано, является ли то или иное определение подходящим. Впервые предложенные Л. А. Заде определения аксиоматизируют следующие свойства: 1) пересечением двух нечетких множества A и B есть наибольшее нечеткое множество, содержащееся и в A и в B одновременно; 2) объединением A и B есть наименьшее

нечеткое множество, содержащее хотя бы одно из нечетких множеств A или B [338]. Единственными операциями, удовлетворяющими данным аксиомам, являются следующие:

пересечение нечетких множеств:

$$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), (C = A \cap B), \quad (1.1)$$

объединение нечетких множеств:

$$\mu_D(x) = \sup(\mu_A(x), \mu_B(x)), (D = A \cup B). \quad (1.2)$$

В статье [327] вводятся более общие определения:

$$\mu_C(x)_p = 1 - \min [1, [(1-\mu_A(x))^p + (1 - \mu_B(x))]^{1/p}], \quad (1.3)$$

$$\mu_D(x)_p = 1 - \min [1, [\mu_A(x)^p + \mu_B(x)]^{1/p}], p \geq 1. \quad (1.4)$$

Введенные операции (1.3), (1.4) при $p = \infty$ переходят в формулы (1.1), (1.2). При $p = 1$ получаем операции типа ограниченная разность и ограниченная сумма, которые иногда используются для задач, в которых трудно получить точное решение [263]. Отметим, что операции (1.3), (1.4) идемпотентны лишь при $p = \infty$, т.е., если A – нечеткое множество, то при $p \neq \infty$ не выполняются естественные для любых множеств условия: $C = A \cap A = A$, $D = A \cup A = A$. Формально введенные математические операции носят «жесткий» характер, т. е. при пересечении отсутствует возможность компенсации имеющихся значений $\mu_A(x)$ какими-либо значениями $\mu_B(x)$ и наоборот. Допуская существование задач, в которых требуется компенсация, Л.А.Заде и Р.Беллман в работе [165] предложили более «мягкие» определения операций пересечения и объединения, по форме подобные классическим операциям с вероятностями. Для конструирования функций принадлежности пересечения и объединения ими предложено использовать операции:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x), \quad \mu_D(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_C(x). \quad (1.5)$$

Авторы [165] отмечают, что как с практической, так и с математической точки зрения «жесткие» операции (1.3), (1.4) предпочтительнее «мягких» (1.5), за исключением возможных ситуаций, когда операция взятия минимума не передает требуемого смысла союза «и», обычно связываемого с пересечением. К тому же «мягкие» операции не обладают свойством идемпотентности. Тем не менее, на практике используют как «жесткие», так и «мягкие» операции. Так, в работе [70] успешно использовались «мягкие» операции, в то время как в [259] на примере построения управляющего алгоритма на основе лингвистического протокола действий человека-оператора показано, что использование «мягких» операций приводит к абсурдным результатам. Обоснованию операций пересечения и объединения, как одному из центральных вопросов теории нечетких множеств, посвящено большое число работ [165, 161, 164, 207, 282, 302].

Наиболее полное решение вопроса дано в статье Д. Егера [319], где доказано, что только «жесткие» операции позволяют сохранять информацию качественного характера независимо от конкретных численных значений функций принадлежности, что является существенным доводом в пользу их использования на практике. Следует отметить, что при решении практических задач с применением элементов теории нечетких множеств в большинстве случаев используются «жесткие» операции. Тем не менее, ввиду отсутствия однозначных результатов теории необходимо обосновывать применение того или иного типа операций для каждого нового класса задач.

Дополнением нечеткого множества A в X называется нечеткое множество \bar{A} с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad x \in X. \quad (1.6)$$

Сумму двух нечетких множеств A и B в X обозначим через $A + B$ и определим как

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad (1.7)$$

для каждого $x \in X$, где \vee - операция взятия максимума, т.е. $a \vee b = \max(a, b)$.

Сумма нечетких множеств соответствует союзу «или».

Приведем пример сложения нечетких множеств, определенных на дискретном носителе: если $X = \{1, 2, 3, 4\}$, и $A = 0.2/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4$ и $B = 1/1 + 0.8/2 + 0.5/3 + 0.2/4$, то $A + B = 1/1 + 0.8/2 + 0.8/3 + 1/4$.

Сумму двух нечетких множеств, определенных на континууме, иллюстрирует рис.1.2, на котором $\mu_{A+B}(x)$ обозначена толстой линией.

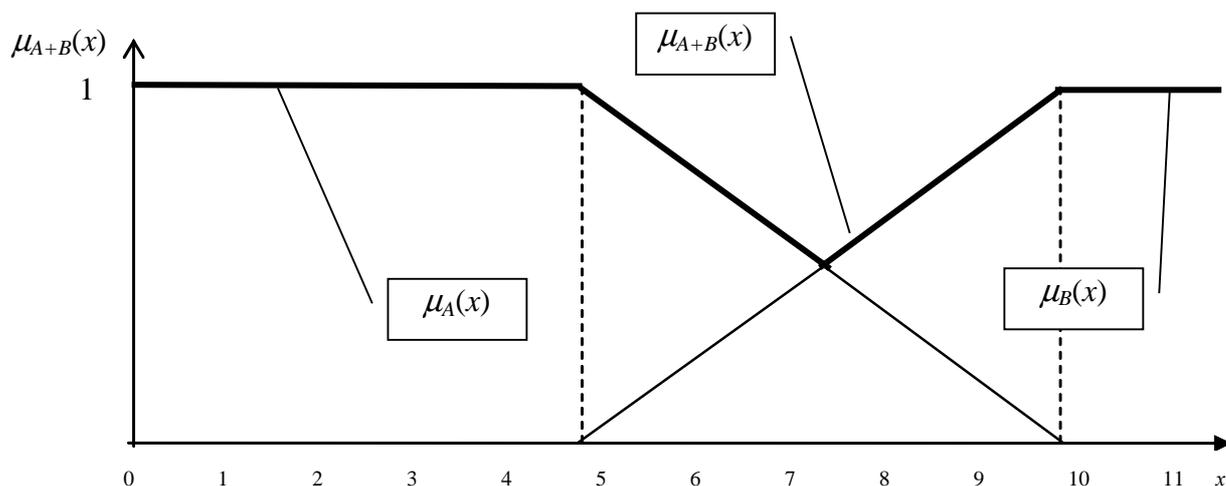


Рис.1.2. Сумма нечетких множеств

Приведенное определение суммы нечетких множеств, введенное Л.Заде [338], используется наиболее часто. Существуют и другие подходы, поэтому следует всегда оговаривать, какое определение суммы используется в конкретном случае.

Рассмотренные операции пересечения и суммы имеют строгое обоснование, они интуитивно понятны и оказываются полезными во многих приложениях. В то же время применяются более общие определения этих операций. Среди таких определений особое место занимают t -нормы и s -нормы (t -конормы), дающие возможность большей свободы в выборе желаемых свойств используемых операций. Однако отметим, что на практике они являются только весьма удобной формой обозначений для тех исследователей, которые по тем или иным причинам желают уйти от наиболее важного для практики вопроса выбора конкретной формы операции с нечеткими множествами.

t -норма определяется как функция

$$t: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad (1.8)$$

такая, что для каждого $a, b, c \in [0, 1]$ выполняются условия:

- 1) $t(a, 1) = a,$

- 2) монотонности, т.е. $a \leq b \Rightarrow t(a, c) \leq t(b, c)$,
- 3) коммутативности, т.е. $t(a, b) = t(b, a)$,
- 4) ассоциативности, т.е. $t[a, t(b, c)] = t[t(a, b), c]$.

Из приведенного определения следует, что t -норма монотонно возрастает относительно обоих аргументов, а кроме того, $t(a, 0) = 0$.

Для t -норм обычно используются два вида записи: $t(a, b)$ или tab . Кроме того, часто применяется обозначение $a_1 t a_2 t \dots t a_{k-1} t a_k = t(a_1, \dots, t(a_{k-1}, a_k) \dots) = t_{i=1}^k a_i$.

Приведем примеры некоторых важнейших t -норм:

- minimum $t(a, b) = a \wedge b = \min(a, b)$;
- алгебраическое произведение $t(a, b) = a \cdot b$;
- t -норма Лукасевича $t(a, b) = \max(0, a + b - 1)$.

s -норма (t -конорма) определяется как функция

$$s: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad (1.9)$$

такая, что для каждого $a, b, c \in [0, 1]$ имеют место соотношения:

- 1) $s(a, 0) = a$,
- 2) монотонности, т.е. $a \leq b \Rightarrow s(a, c) \leq s(b, c)$,
- 3) коммутативности, т.е. $s(a, b) = s(b, a)$,
- 4) ассоциативности, т.е. $s[a, s(b, c)] = s[s(a, b), c]$.

Для s -норм также используются два вида записи: $s(a, b)$ или sab . Кроме того, применяются обозначения $a_1 s a_2 s \dots s a_{k-1} s a_k = s(a_1, \dots, s(a_{k-1}, a_k) \dots) = s_{i=1}^k a_i$.

Примерами некоторых важнейших s -норм являются:

- maximum $s(a, b) = a \vee b = \max(a, b)$;
- произведение вероятностного типа $s(a, b) = a + b - ab$;
- s -норма Лукасевича $s(a, b) = \min(a + b, 1)$.

Обратим внимание на то, что t -норма является дуальной по отношению к s -норме в том смысле, что:

$$s(a, b) = 1 - t(1 - a, 1 - b).$$

Приведенные выше примеры t -норм и s -норм расширяют возможности выбора «адекватных» операций. Для целей еще более гибкого выбора применяют операции,

зависящие от параметров. Определения такого типа позволяют с помощью соответственного подбора параметров еще более расширить понятия операций, определяющих пересечение и сумму. Приведем три таких определения.

Параметрическое семейство t -норм и s -норм Вебера [313] для $\lambda \in (-1, \infty)$ определяется следующим образом:

- для t -норм $t_{\lambda}^W(a,b) = \max\left(\frac{a+b-1+\lambda ab}{1+\lambda}, 0\right)$, (1.10)

- для s -норм $s_{\lambda}^W(a,b) = \min\left(a+b-\frac{\lambda ab}{1+\lambda}, 0\right)$. (1.11)

Заметим, что при $\lambda = 1$ формулы (1.10), (1.11) трансформируются в t -норму и s -норму Лукасевича, т.к. $t(a,b) = a + b - 1$ и $s(a,b) = \min(a + b, a)$. Для $\lambda \rightarrow \infty$ имеем $t^W(a,b) = ab$ и $s^W(a,b) = a + b - ab$. Для $\lambda \rightarrow -1$ получаем так называемое *острое произведение*

$$t_1 = \begin{cases} a, & b = 1 \\ b, & a = 1 \\ 0, & a \neq 1 \text{ или } b \neq 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

и *острую сумму*

$$s_1 = \begin{cases} a, & b = 0 \\ b, & a = 0 \\ 1, & a \neq 0 \text{ или } b \neq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Семейство t -норм и s -норм Хамачера [215] для $\gamma > 1$ определяется соотношениями:

- для t -норм $t_{\gamma}^H(a,b) = \frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)}$, (1.14)

- для s -норм $s_{\gamma}^H(a,b) = \frac{a+b-ab-(1-\gamma)ab}{1-(1-\gamma)ab}$. (1.15)

Семейство t -норм и s -норм Р.Егера [327] для $p > 0$ определяется зависимостями:

- для t -норм
$$t_p^Y(a, b) = 1 - \min \left\{ \left[(1-a)^p + (1-b)^p \right]^{1/p}, 1 \right\}, \quad (1.16)$$

- для s -норм
$$s_p^Y(a, b) = \min \left[(a^p + b^p)^{1/p}, 1 \right]. \quad (1.17)$$

Понятия t -нормы и s -нормы широко используются в теории нечетких множеств.

При применении введенных операций для решения конкретных задач важной является проблема *адекватности* операций на нечетких множествах. Оригинальные определения Л.Заде для пересечения (1.1) и суммы (1.7) показали свою конструктивность и эффективность в приложениях. Однако вопрос об адекватности введенных операций логике восприятия человека, т.е. соответствии применению правил «и» или «или» не имеет строгого однозначного решения. Для обоснования адекватности определений, использовались самые разные подходы. Среди них можно выделить следующие:

- *интуитивные*, такие, как, например, оригинальные подходы Л.Заде [338, 341], в которых принятые операции обосновываются более или менее рациональными аргументами;
- *аксиоматические*, в которых полагается выполнение некоторого набора рациональных условий, исходя из которых, используя аналитические методы, доказывается, что принятые определения являются единственными, выполняющими эти условия. Примером такого подхода является работа Р. Беллмана [164];
- *экспериментальные*, в которых конструируются некоторые психологические тесты для группы индивидов (например, студентов), а потом на основе их ответов определяются мотивированные операции. Примером этого подхода служит работа [345].

Применение перечисленных подходов выявляет отдельные частные аспекты адекватности операций, но не решает проблему в целом. Эффективным средством для конструирования описаний нечетких множеств является введение понятия α -уровней.

Множеством α -уровня нечеткого множества A в X называется множество в обычном смысле A_α , состоящее из элементов $x \in X$, степени принадлежности которых нечеткому множеству A не меньше числа α

$$A_\alpha = \{x |_{x \in X}, \mu_A(x) \geq \alpha\}. \quad (1.18)$$

Например, если $X = \{1, 2, 3, 4\}$ и $A = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4$ (под суммированием понимается объединение), то соответствующие α -уровни представляются в виде:

$$A_{0.1} = \{1, 2, 3, 4\}, A_{0.5} = \{2, 3, 4\}, A_{0.8} = \{3, 4\}, A_1 = \{4\}.$$

Декомпозиция нечеткого множества на совокупности α -уровней

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_{\alpha} \quad (1.19)$$

оказалась мощнейшим средством прикладного нечетко-интервального анализа [94]. Поэтому остановимся на рассмотрении особенностей α -уровней и их использования несколько подробнее.

В выражении (1.19) αA_{α} являются нечеткими множествами с соответствующими функциями принадлежности

$$\mu_{\alpha A_{\alpha}}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in A_{\alpha} \\ 0, & x \notin A_{\alpha} \end{cases}$$

Рассмотрим пример представления нечеткого множества на основе α -уровней.

Пусть $X = \{1, 2, \dots, 10\}$, и $A = 0.1/2 + 0.3/3 + 0.6/4 + 0.8/5 + 1/6 + 0.7/7 + 0.4/8 + 0.2/9$.

Тогда

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\alpha \in (0,1]} \alpha A_{\alpha} = 0.1(1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9) + \\ &\quad + 0.2(1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9) + \\ &\quad + 0.3(1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \\ &\quad + 0.4(1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \\ &\quad + 0.6(1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7) + 0.7(1/5 + 1/6 + 1/7) + \\ &\quad + 0.8(1/5 + 1/6) + 1(1/6) = \\ &= 0.1/2 + 0.3/3 + 0.6/4 + 0.8/5 + 1/6 + 0.7/7 + 0.4/8 + 0.2/9. \end{aligned}$$

Идея представления нечетких множеств в виде совокупности α -уровней оказалась очень продуктивной в приложениях, поскольку она позволяет использовать при оперировании с нечеткими числами методы интервальной арифметики.

Нечетким отношением R на прямом произведении пространств $X \times Y = \{(x, y), x \in X, y \in Y\}$ является нечеткое множество в $X \times Y$, характеризуемое функцией принадлежности μ_R , которая сопоставляет каждой упорядоченной паре (x, y) ее степень принадлежности к R .

В общем случае, n -е нечеткое множество на декартовом произведении $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ есть множеством в X с функцией принадлежности $\mu_R(x_1, \dots, x_n), x_i \in X_i, i = 1, \dots, n$.

Нечеткие множества, порождаемые отображениями, определяются следующим образом [165]. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение из X в Y , причем образ элемента x обозначается через $y = f(x)$, и пусть A – нечеткое множество в X . Тогда отображение f порождает нечеткое множество B в Y с функцией принадлежности, задаваемой соотношением

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x). \quad (1.20)$$

Выражение (1.20) является одной из формулировок *принципа обобщения*, играющего важную роль в теории нечетких множеств. В задачах принятия решений чаще используют другую его интерпретацию [47]. Пусть имеется отображение $f: X \rightarrow Y$ и $A = \int_x \mu(x) / x$ – нечеткое множество на X . Тогда справедливо:

$$f(A) = \int_x \mu(x) / f(x).$$

Принцип обобщения позволяет расширить область определения отображения f на нечеткие подмножества универсального множества.

Расплывчатое множество $B(x)$ в пространстве $Y = \{y\}$ называется условным по x , если его функция принадлежности зависит от x как от параметра. Будем его обозначать в виде записи $\mu_B(y/x)$. Пусть каждому $x \in X$ соответствует расплывчатое множество $B(x)$ в Y с функцией принадлежности $\mu_B(y/x)$. Тогда любое расплывчатое множество A в X порождает расплывчатое множество B в Y , определяемое соотношением

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min[\mu_A(x), \mu_B(y/x)]. \quad (1.21)$$

Для упрощения записи операции \sup и \min часто обозначают, как \vee и \wedge , соответственно [185]. Тогда последнее выражение принимает вид:

$$\mu_B(x) = \vee_x [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y/x)] \quad (1.22)$$

Отметим, что соотношение (1.22) аналогично, но не эквивалентно классическому маргинальному распределению вероятностей [201].

1.1.3. Степень нечеткости

В зависимости от информированности и опыта лиц, принимающих решения (ЛПР), представления, которыми они пользуются при построении нечетких множеств, могут обладать различной степенью расплывчатости, в результате чего возникает вопрос о градациях нечеткости самих нечетких множеств.

Формализация *меры нечеткости* имеет важное практическое и теоретическое значение. Этому вопросу посвящено значительное число работ [259, 184, 186, 196, 197, 202, 244, 279, 255, 330], в которых, за исключением [184, 330], рассматриваются различные варианты мер нечеткости, удовлетворяющие требованиям, которые введены впервые авторами работы [184].

Пусть A – нечеткое множество на X и $d(A)$ – мера нечеткости A . Тогда должны выполняться следующие требования:

- 1) $d(A)=0$, если A четкое множество;
- 2) $d(A)$ достигает максимума при $\mu_A(x) = \frac{1}{2}$ для всех $x \in X$;
- 3) $d(A) \geq d(A^*)$, если $\begin{cases} \mu_{A^*}(x) \geq \mu_A(x), & \mu_A(x) > \frac{1}{2}, \\ \mu_{A^*}(x) \leq \mu_A(x), & \mu_A(x) < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Согласно [184], этим требованиям удовлетворяет мера, аналогичная мере количества энтропии Шеннона, если вместо вероятностей в ней использовать функции принадлежности.

В работах [202, 255] показано, что свойствам 1÷3 удовлетворяет довольно широкий класс функций. Анализируя недостатки такого рода конструктивных подходов к построению мер нечеткости, Р. Егер ввел определение, вытекающее из формулировок операций над нечеткими множествами [330]. Он исходил из того, что единственным коренным отличием алгебры нечетких множеств от обычной булевой алгебры является непустота пересечения A и \bar{A} , т. е. для нечетких множеств

$$A \cap \bar{A} = A \cap (1 - A) = B, \quad (1.23)$$

где B - непустое множество.

Очевидно, что чем ближе A к \bar{A} , тем больше B , и тем сильнее A отличается от четкого множества. На основании этого Р. Егер предложил для описания меры четкости нечеткого множества A выражение

$$D_p(A, \bar{A}) = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_{\bar{A}}(x_i)|^p \right]^{1/p}, \quad (1.24)$$

где $p = 1, 2, \dots, \infty$ - степень нечеткости.

На основе (1.24) конструируется выражение для определения меры нечеткости

$$d_p(A, \bar{A}) = 1 - D_p(A, \bar{A}) / n^{1/p}. \quad (1.25)$$

Определение (1.25) удовлетворяет всем сформулированным выше требованиям к мере нечеткости.

Для более гибкого использования степени нечеткости в работе [341] введены специальные операции. Степенью нечеткого множества A называется множество $A^\varepsilon = \{\mu_A^\varepsilon(x_i)/x_i\}$, где ε - некоторое число. При $\varepsilon = 2$ операция сводится к возведению в квадрат – в операцию концентрации $CON(A) = A^2$, а при $\varepsilon = 0.5$ – в операцию растяжения $DIL(A) = A^{0.5}$. Поскольку степень принадлежности к нечеткому множеству $\mu_A(x)$ - величина положительная, не превосходящая единицы, операция CON снижает степень нечеткости описания, в то время

как *DIL* повышает. Рассмотрение операции модифицирования нечеткости играет важную роль при формировании свертки частных критериев качества.

В конкретных прикладных проблемах могут встретиться ситуации, когда функции принадлежности нечетких множеств сами являются нечеткими множествами [47]. Такая ситуация типична при задании множества A на лингвистическом уровне. Пусть, например $X = \{K_1, K_2, K_3\}$ клиенты банка. Они могут оцениваться как лица разной степени надежности с точки зрения своевременности возврата ими кредитов. Тогда нечеткое множество «надежных клиентов» можно представить, например, в следующей форме:

$A = \{\text{«не очень надежный клиент»}/K_1, \text{«надежный клиент»}/K_2, \text{«исключительно надежный клиент»}/K_3\}$.

В этой конструкции лингвистические определения являются стандартными функции принадлежности, которые с помощью современных средств теории нечетких множеств могут быть заменены соответствующими функциями принадлежности, имеющими конкретную математическую форму. В результате получаются математические конструкции, обладающие фактически двойной нечеткостью, поскольку их функции принадлежности сами являются нечеткими множествами. Нечеткие множества с нечеткими функциями принадлежности называют нечеткими множествами типа 2 [47].

Пусть A - нечеткое множество типа 2 на X . Тогда для каждого $x \in X$ функция принадлежности $\mu_A(x)$ является нечетким множеством в Y с функцией принадлежности $f_x(y)$, т. е.

$$\mu_A(x) = \int f_x(y) / y, \quad (1.26)$$

или для дискретного случая

$$\mu_A(x) = \left\{ \frac{f_x(y_i)}{y_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.27)$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \left\{ \frac{f_x(y_i)}{1 - y_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.28)$$

Если A и B - нечеткие множества типа 2 и

$$\mu_A(x) = \left\{ \frac{f_x(y_i)}{y_i} \right\}, \quad \mu_B(x) = \left\{ \frac{g_x(z_j)}{z_j} \right\},$$

где $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$,

то функция принадлежности множества $D = A \cup B$ имеет вид

$$\mu_D(x) = \left\{ \frac{f_x(y_i) \wedge g_x(z_j)}{(y_i \vee z_j)} \right\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m. \quad (1.29)$$

Аналогично для пересечения $C = A \cap B$

$$\mu_C(x) = \left\{ \frac{f_x(y_i) \wedge g_x(z_j)}{(y_i \wedge z_j)} \right\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m. \quad (1.30)$$

В том случае, если элементы x являются нечеткими подмножествами какого-либо множества z , для дискретного случая имеем

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \right\}, \quad x_i = \left\{ \frac{h_i(z_j)}{z_j} \right\}, \quad (1.31)$$

$$A = \left\{ \frac{\max_i [\mu_A(x_i) h_i(z_j)]}{z_j} \right\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

Следуя Л Заде [344], в отличие от нечетких множеств (1.26), (1.27) типа 2, полученную математическую конструкцию (1.31) будем называть нечеткими множествами 2-го уровня. Такое уточнение терминологии необходимо, поскольку в приложениях оба рассмотренных вида двойной нечеткости часто встречаются одновременно, что приводит иногда к необоснованным операциям сведения одного к другому и, соответственно, неадекватным выводам по результатам анализа конкретных ситуаций.

Из последнего выражения (1.31) следует, что степень принадлежности z_j к A определяется функцией

$$\mu_A(z_j) = \max_i [\mu_A(x_i)h_i(z_j)], i = 1, \dots, n. \quad (1.32)$$

Отмети, что выражения (1.29)-(1.32) можно представить и в более общей форме, используя вместо операций минимума, максимума и умножения, описанные выше t -нормы или s -нормы. [238]. Однако в настоящей книге для операций с нечеткими множествами типа 2 и уровня 2 будут использоваться именно выражения (1.29)-(1.32), как наиболее соответствующие особенностям решаемых задач. Основы теория нечетких множеств типа 2 описаны в работах [47, 325, 264], где введены основные операции с ними. В работе [325] отмечено, что, пользуясь принципом обобщения Л. А. Заде, можно построить нечеткие множества 3, 4, ..., N и т.д. типов.

1.1.4. Нечеткие и возможные случайные события

При решении прикладных задач могут встретиться ситуации, когда одновременно присутствуют оба вида неопределенности - нечеткость и случайность. В практических приложениях теория нечетких множеств хорошо работает совместно с методами теории вероятностей и математической статистики [47, 75, 162, 183, 230, 324]. В работе [47] введено важное для практики понятие математического ожидания функции при наличии обоих типов неопределенности.

Пусть A -нечеткое подмножество множества $X = \{x_i\}$, $i = 1, \dots, n$, со степенью принадлежности $\mu_A(x)$ и пусть P_i - вероятность события x_i . Тогда математическое ожидание некоторой функции f , определенной на X , для дискретного случая определяется конструкцией:

$$C_p(f, A) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\mu_A(x_i)P_i. \quad (1.33)$$

Предложенное определение (1.33) обеспечивает органическую связь теории нечетких множеств с традиционными подходами, основанными на теоретико-вероятностной интерпретации неопределенностей, и позволяет более детально описывать существующие неопределенности в исходных данных, причем, при необходимости в сочетании с методами традиционной статистики.

В настоящее время принято выделять четыре базовых типа вероятностей. Так, в [53, 67] на основе анализа отношений между субъектом, знанием и объектом определены следующие виды вероятностей: классическая, частотная, логическая и субъективная. При этом показано, что каждая из них удовлетворяет исходным аксиомам теории вероятностей А.Н.Колмогорова [63].

Однако в общем случае на практике постоянно встречаются ситуации, когда ни одна из этих интерпретаций вероятности не обеспечивает адекватного описания прогноза возможности того или иного события. Наглядный пример приведен в [322], где анализируется ситуация ожидания автобуса группой людей. Автобус прибывает полный и количество пассажиров, которые могут в него попасть, зависит от решения водителя. На этом примере отчетливо проявляется различие между возможностью (степенью легкости) того, что в автобус войдут 1, 2, 3,..., и т.д. пассажиров и вероятностью того, что водитель их возьмет.

Основания *формализованной теории возможностей* заложены Л.А.Заде в работах [340, 342, 339], где в отличие от вероятности возможность предлагается рассматривать как степень легкости, с которой рассматриваемая переменная может принимать определенные значения. В качестве основы теории возможностей использован математический аппарат теории нечетких множеств, аналогично тому, как основой теории вероятности является теория меры.

В работе [339] распределение возможностей определено следующим образом: пусть X - переменная, принимающая значения из множества $U = \{u_1, u_2, \dots\}$. Тогда распределение возможности X принимает значения из U и описывается функцией $\pi_x : U \rightarrow [0,1]$, где $\pi_x(X) = Poss : [X = u]$. Обозначение *Poss* используется для отражения конкретного значения возможности при фиксированном $u \in U$.

В рассмотренном выше примере ожидания автобуса X - количество пассажиров, которые имеют возможность войти в автобус; u - элементы множества $U = \{1,2,3,\dots\}$. Тогда $\pi_x(2)$ - возможность, что в автобус войдут 2 человека, $\pi_x(3)$ - 3 человека и т.д.

Перейдем к расширению теории возможностей для случая оценки возможности (легкости) реализации множеств. Пусть A - подмножество в U , тогда $\pi_A(A) = Poss[u \in A]$.

В теории возможностей постулируется, что

$$\pi_A(A) = \sup_{X \in A} [\pi_X(X)]. \quad (1.34)$$

Если \hat{A} - нечеткое подмножество в U , то

$$\pi_{\hat{A}}(\hat{A}) = \sup_{X \in \hat{A}} [\pi_X(X) \wedge \mu_{\hat{A}}(X)], \quad (1.35)$$

где $\mu_{\hat{A}}(X)$ - функция принадлежности подмножества \hat{A} .

В работах [339, 318], доказано, что в случаях наличия лишь косвенной информации о распределении возможностей $\pi_X(X)$, то есть, когда можно указать лишь, что $\pi_X(X_1)$ более возможно, чем $\pi_X(X_2)$, без количественной оценки этого отношения (linear ordering [204]), выражения (1.27), (1.28) являются единственно допустимыми. В тех случаях, когда отношения между возможностями можно охарактеризовать конкретными числами (cardinal ordering), распределение возможностей вырождается в вероятностное распределение [339]. Тогда с $\pi_X(X)$ следует оперировать как с обычной плотностью вероятности. Отсюда автор работы [318] делает вывод, что теорию возможностей можно рассматривать как обобщение теории вероятностей.

Появление формализованной теории возможностей породило массу вопросов методологического плана, в частности, проблему единой трактовки самой категории возможности [212, 290]. Последовательный анализ понятия возможности с общефилософских позиций с учетом результатов теории проведен в работе [86].

Основатель теории возможностей Л.А. Заде тесно связывал ее с лингвистической интерпретацией нечетких множеств. В то же время, как указывается в [322], идея описания истинности лингвистических переменных, сформулированных на естественном языке с помощью неоднозначной логики, была высказана еще Л.Виттгенштейном [317].

Однако, строгие методы оперирования с переменными лингвистической природы появились лишь с развитием теории нечетких множеств. Лингвистическая интерпретация играет большую роль в теории нечетких множеств и теории возможностей, позволяя оперировать с объектами качественной природы, в том числе с высказываниями на естественном языке.

Главным достоинством теории возможностей с точки зрения задач оптимизации и идентификации является наличие формализованного математического аппарата, позволяющего работать в условиях неопределенности при отсутствии информации, достаточной для применения теоретико-вероятностных методов.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что теория нечетких множеств находится на стадии интенсивного развития, не является концептуально замкнутой, допускает неоднозначность ряда математических операций внутри себя. Неполнота существующей теории нечетких множеств порождает появление целого ряда альтернативных вариантов теории [317, 231, 269, 224, 315, 314, 276, 311, 267], свободных от тех или иных недостатков аксиоматизации, предложенной Л.А.Заде.

В ряде случаев [317, 231, 269] предложенные варианты выглядят весьма перспективными, расширяющими концепцию нечеткости и требуют более детального изучения и испытаний на практике. В других случаях, как признает автор [311], новые теории нечетких множеств имеют лишь академический интерес, будучи в значительной степени практически неконструктивными.

Подводя итог, следует подчеркнуть, что в теории принятия решений, многокритериальной оптимизации, автоматическом управлении и во многих других прикладных задачах в настоящее время широко используется вариант теории нечетких множеств, предложенный Л.А.Заде, хорошо зарекомендовавший себя на практике.

§ 1.2. Нечеткость, возможность, вероятность: методологические проблемы взаимосвязи и разграничения

В настоящее время большинство исследователей склонны рассматривать нечеткость и случайность, как два качественно разных вида неопределенности. С одной стороны, нечеткость касается величин и отношений, границы которых неточно определены, т.е. когда их нельзя адекватно определить (описать), используя понятия обычного множества, поскольку переход от принадлежности к непринадлежности множеству уже не имеет скачкообразного характера. С другой стороны, случайность касается ситуаций, в которых событие точно определено, а неопределенным является вероятность его наступления.

Однако, легко представить себе, что в каждодневной жизни встречается много ситуаций, в которых нечеткость и случайность выступают вместе. Например, если мы спрашиваем, какая вероятность того, что завтра будет *хорошая погода*, или о том, какая вероятность того, что в будущем году будет *высокая инфляция*, то в обоих случаях имеем неточно определенные (нечеткие) события, соответственно *хорошую погоду* и *высокую инфляцию*. Очевидно, что для того, чтобы можно было формально определить вероятности

таких неточно определенных событий, необходимо ввести понятия *нечеткого события* и *вероятности нечеткого события*.

Первый подход к решению этой проблемы предложил Л.Заде [343]. Его отправной точкой является понятие *нечеткого события*, которое есть нечеткое множество A в $X = \{x\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ с соответствующей функцией принадлежности. При этом предполагается, что вероятности (четких) элементарных событий $x_1, \dots, x_n \in X$ известны и равны, соответственно, $p(x_1), \dots, p(x_n) \in [0, 1]$, причем $p(x_1) + \dots + p(x_n) = 1$.

Среди наиболее важных понятий и свойств, описывающих нечеткие события, назовем следующие:

Нечеткие события A и B в X *независимы* тогда и только тогда, когда

$$p(AB) = p(A)p(B).$$

Условную вероятность нечеткого события A в X при условии наступления нечеткого события B в X будем обозначать $p(A | B)$ и определим как

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}, \quad p(B) > 0$$

Если нечеткие события A и B независимы, то

$$p(A / B) = p(A).$$

Отметим, что оба приведенных понятия аналогичны их четким аналогам.

Четкая вероятность нечеткого события A в $X = \{x\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ обозначается $p(A)$ и определяется как

$$p(A) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) p(x_i) \tag{1.36}$$

т.е. как ожидаемое значение функции принадлежности нечеткому множеству A , с функцией принадлежности $\mu_A(x)$.

Пример. Пусть $X = \{1, 2, \dots, 5\}$, $p(x_1) = 0.1$, $p(x_2) = 0.1$, $p(x_3) = 0.1$, $p(x_4) = 0.3$, $p(x_5) = 0.4$ и $A = 0.1/2 + 0.5/3 + 0.7/4 + 0.9/5$.

Тогда

$$p(A) = 0.1 \times 0.1 + 0.1 \times 0.5 + 0.3 \times 0.7 + 0.4 \times 0.9 = 0.73$$

Главными свойствами вышеописанной вероятности наступления нечеткого события в смысле Л.Заде [337] являются следующие:

$$p(\emptyset) = 0$$

$$p(\neg A) = 1 - p(A)$$

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p\left(\sum_{i=1}^r A_i\right) = \sum_{i=1}^r p(A_i) - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1, k < j}^r p(A_j \cap A_k) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1, k < j}^r \sum_{l=1, l < k}^r p(A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots \\ + (-1)^{r+1} p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r)$$

Заметим, что в представленном подходе Л.Заде, событие является нечетким, однако его вероятность - четкая, и она представлена действительным числом из интервала $[0,1]$. В некотором смысле это является противоречием, и поэтому позднее были предложены другие определения нечеткой вероятности нечеткого события. Далее приведены некоторые из них.

Р. Егером [320] нечеткое событие определено как нечеткое множество A в $X = \{x\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ с функцией принадлежности, измеренной в смысле булевой логики. При этом предполагается, что вероятности элементарных событий $p(x_1), \dots, p(x_n) \in [0, 1]$ известны, причем $p(x_1) + \dots + p(x_n) = 1$.

Нечеткая вероятность нечеткого события A в $X = \{x\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ обозначается $P(A)$ и определяется как следующее нечеткое множество в $[0, 1]$

$$P(A) = \sum_{\alpha \in (0,1]} \alpha / p(A_\alpha) . \quad (1.37)$$

Выражение (1.37), очевидно, является результатом применения принципа расширения. В терминах функции принадлежности определение (1.37) имеет вид:

$$\mu_{P(A)}[p(A_\alpha)] = \alpha \quad \text{для каждого } \alpha \in (0,1],$$

где A_α есть α -уровень нечеткого множества A .

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $p(1) = 0.1$, $p(2) = 0.3$, $p(3) = 0.5$, $p(4) = 0.1$, и $A = 0.2/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4$.

Тогда $\alpha \in \{0.3, 0.5, 0.8, 1\}$ и

$$A_1 = \{4\} \quad A_{0.8} = \{3, 4\} \quad A_{0.5} = \{2, 3, 4\} \quad A_{0.3} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$\text{Или } p(A_1) = 0.1 \quad p(A_{0.8}) = 0.6 \quad p(A_{0.5}) = 0.9 \quad p(A_{0.3}) = 1.$$

Следует отметить, что определение Р. Егера также не разрешает всех противоречий и проблем, так как оно не выполняет вышеприведенных свойств вероятности, которым удовлетворяет определение Л.Заде. Отметим, что на практике подход Егера уже нашел свое приложение в нечетком управлении на основе нечеткой логики. Предложены и другие определения нечеткого события, опирающиеся на то, что нечеткость и случайность, являясь качественно разными видами неопределенности, не являются взаимоисключающими, а напротив, взаимосвязаны и дополняют друг друга при анализе одних и тех же событий.

В настоящее время наиболее дискуссионными являются вопросы, связанные с разграничением теории возможностей и теории вероятностей. Для того, чтобы более наглядно представить сущность проблемы, рассмотрим следующий пример. Предположим, что свидетель оценил возраст подозреваемого в преступлении как интервал в границах от 20 до 30 лет. Таким образом, мы получаем интервальную переменную

$$\text{Возраст (подозреваемый)} = [20,30].$$

Это определение означает, что любой возраст 19, 31 и пр., не содержащийся в интервале, исключается из рассмотрения, т.е. признается невозможным. Подобный интервальный подход автоматически индуцирует четкие границы между возможностью и невозможностью.

Для потребностей практики такой подход оказывается недостаточно гибким для оценки возраста подозреваемого. Введем нечеткое множество «Молодой», функция принадлежности которого представлена на рис.1.3. При этом мы автоматически вводим распределение возможностей (возможность того, что возраст подозреваемого 19 лет равна 0.7, 21 год – 1.0 и т.д.). Распределение возможностей в математическом смысле описывается функцией принадлежности:

$$P_{\text{Возраст(подозреваемый)}}(x) = \mu_{\text{Молодой}}(x),$$

где Π - распределение возможностей для возраста подозреваемого, x -возраст.

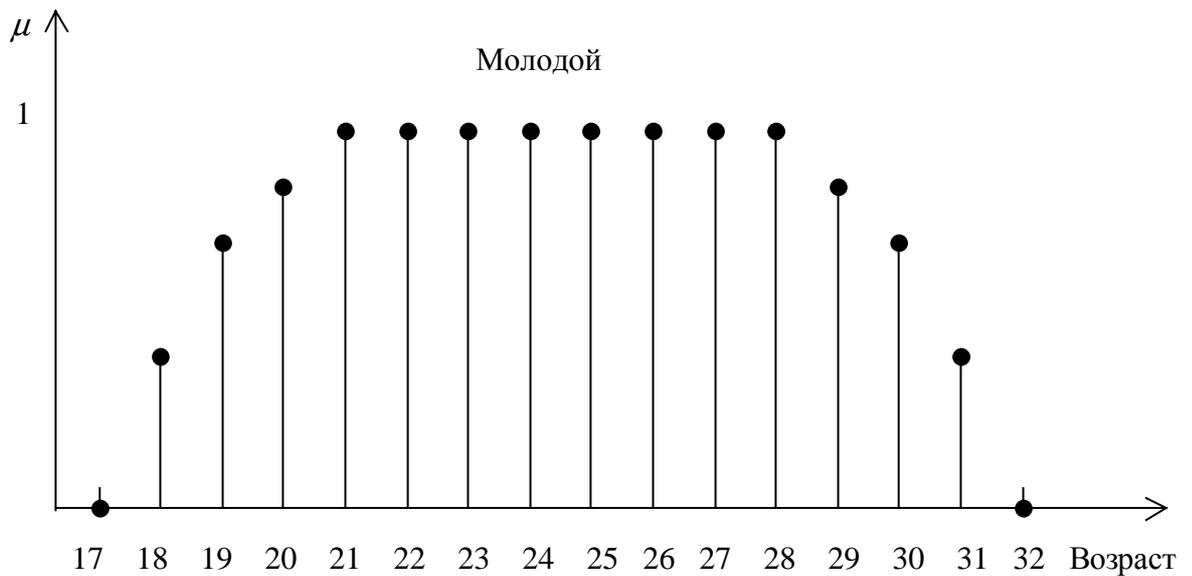


Рис. 1.3. Распределение возможностей для переменной «Молодой»

В общем случае, если мы описываем некоторую переменную X , значение которой нам точно неизвестно, с помощью нечеткого множества A , то тем самым мы автоматически генерируем распределение возможностей на X , задаваемое функцией принадлежности:

$$\Pi_X(x) = \mu_A(x).$$

Формально распределение возможностей отличается от распределения вероятностей тем, что не требует равенства единице интеграла от $\Pi_X(x)$ по X . Чтобы глубже проанализировать сущность различий, сопоставим интервальные переменные и вероятности. Как уже указывалось, интервальные переменные (объекты) жестко ограничивают возможные значения в своих границах, не указывая на какие-либо вероятности реализации конкретных значений внутри интервала. Подобным образом распределение возможностей устанавливает «степень легкости», с которой переменная может принять определенное значение без какой-либо информации о вероятности этого события.

Таким образом, распределения возможности и вероятности различаются на качественном уровне. Тем не менее, между ними существуют определенные взаимосвязи. Например, если событие невозможно, то оно и невероятное. В формально математическом смысле распределение возможностей можно рассматривать как верхнюю границу распределения вероятностей:

$$P_X(x) \leq \Pi_X(x).$$

Это формальное обстоятельство послужило основой ряда попыток введения конструктивных процедур трансформации (конверсии) распределения возможностей в вероятностное распределение [331].

В простейшем варианте конверсию возможностей в вероятности предлагается проводить путем нормировки типа

$$P(x) = \mu_A(x) / \Pi_X(x) dx.$$

На практике, когда исходное распределение возможностей построено с участием экспертов или лиц, принимающих решения, результаты трансформации должны быть им предъявлены для оценки. Поскольку трансформация может существенно исказить исходные данные, полученные результаты могут быть попросту отвергнуты экспертами. Эксперты на интуитивном уровне обычно хорошо различают количественные меры вероятности (пусть даже субъективные) и качественные суждения о возможности осуществления событий. Распределения возможностей строятся на основе функций принадлежности нечетким множествам. В работе [318] доказано, что построенные таким образом распределения возможностей менее информативны, чем вероятностные распределения. Иными словами, распределение возможностей априори содержит меньше точной количественной информации. Эту проблему мы более детально рассмотрим ниже, однако, приведенные рассуждения позволяют сделать вывод о том, что трансформации распределения возможностей в распределения вероятностей представляются методологически несостоятельными. Обратное вполне допустимо и широко используется на практике. Методики трансформации распределений вероятностей в функции принадлежности рассмотрены в параграфе 1.4.

§ 1.3. Основы прикладного интервального анализа

Параллельно и, в значительной степени независимо от теории нечетких множеств, после опубликования в 1966 г. пионерской работы Р. Е. Мура [265], интенсивно развивалась интервальная математика [292, 260, 129, 54, 218, 178, 266]. Строго говоря, четкий (crisp) интервал можно рассматривать как частный случай нечеткого интервала. Нечетко-

интервальная и обычная интервальная математика тесно связаны, более того, интервальная арифметика может рассматриваться как базис нечетко-интервальной математики.

Основным практическим достоинством аппарата интервальной и нечетко-интервальной математики является возможность осуществления прямых арифметических операций с четко-нечеткими интервальными числами, в то время как многочисленные попытки определить такие операции для параметров, заданных своими частотными распределениями, не привели к успешным результатам. Нечетко-интервальную математику можно в определенной степени рассматривать как обобщение математики обычных интервалов. И в тоже время на практике ряд параметров может быть задан на интервальном и нечетко-интервальном уровне, а часть - на уровне частотных распределений. В этой связи возникает проблема разумного трансформирования частотных распределений в соответствующие им нечеткие интервалы.

В общем случае, нечетко-интервальную математику можно свести к разложению нечетких интервалов на составляющие α -уровни и к дальнейшему оперированию с ними в рамках интервальной математики [240]. На рис. 1.4 показано, что α -уровни являются, в сущности, четкими интервалами, соответствующими определенным заданным значениям функции принадлежности.

В настоящее время существуют несколько базисных подходов к построению интервальной арифметики и множество их модификаций. Последнее связано со специфическими свойствами операций с интервалами, выявленными в процессе исследования.

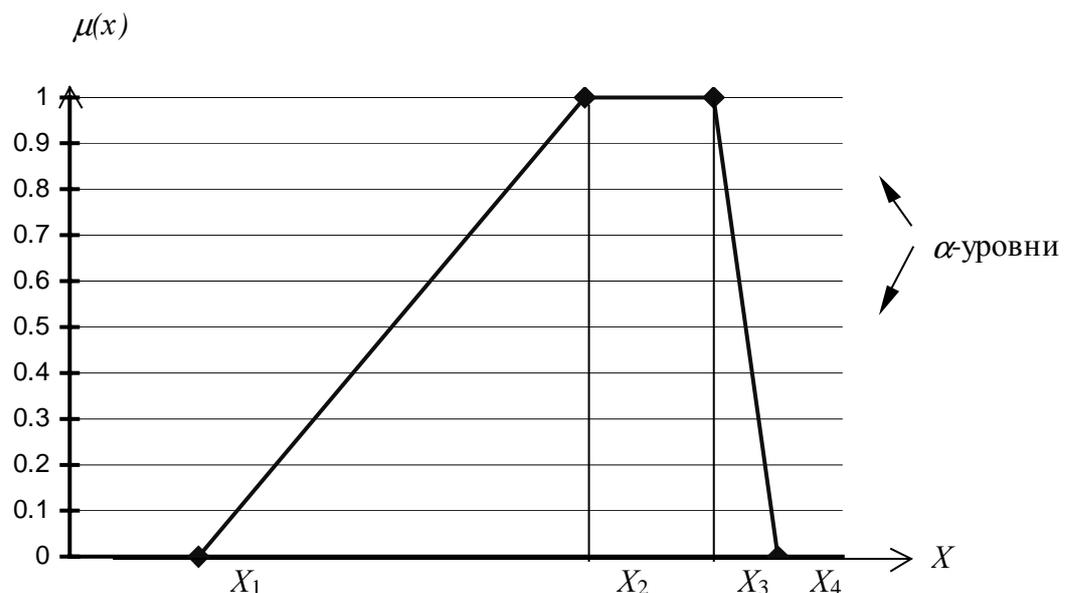


Рис. 1.4. Разложение нечетких интервалов на составляющие α -уровни

Главным и наиболее неприятным на практике свойством интервальной арифметики является сравнительно быстрый рост ширины интервала результата по мере возрастания числа арифметических операций с интервалами. Это обстоятельство послужило причиной появления различных модификаций метода, целью которых являлась, в основном, попытка препятствовать этому явлению. Наиболее известными из них являются: интервальная арифметика с нестандартным вычитанием и делением [151], обобщенная интервальная арифметика [218, 343], сегментная математика [292], центрированная форма [178], MV-форма [265]. Эти подходы оказываются эффективными применительно к определенным классам ситуаций. В целом, рост результирующих интервалов в полной мере отражает реальность и, в сущности, соответствует принципу возрастания неопределенности (энтропии).

Для описания интервалов X применяются два близких способа представления. В литературе, посвященной чисто интервальному анализу, обычно используется форма записи $X = [\underline{x}, \bar{x}]$, где \underline{x} и \bar{x} - нижняя и верхняя границы интервала, соответственно.

В литературе из области нечетко-интервальной математики принято применять следующую форму записи: $X = [x_1, x_2]$, где x_1, x_2 - нижняя и верхняя границы интервала, соответственно. В книге в зависимости от ситуации мы будем употреблять обе формы записи.

В дальнейшем будем использовать наиболее распространенный и в то же время наиболее простой и естественный подход к формированию правил интервальной арифметики [54].

В общем виде произвольную арифметическую операцию $@ = \{+, -, *, /\}$ на интервалах определим следующим образом:

Пусть X, Y, Z - интервалы, тогда

$$Z = X @ Y = \{z = x @ y, x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Из последнего выражения следует, что арифметические операции на интервалах можно реализовать путем выполнения определенных операций с их нижними и верхними границами:

$$Z = X @ Y = [\min\{\underline{x} @ \underline{y}, \underline{x} @ \bar{y}, \bar{x} @ \underline{y}, \bar{x} @ \bar{y}\}, \max\{\underline{x} @ \underline{y}, \underline{x} @ \bar{y}, \bar{x} @ \underline{y}, \bar{x} @ \bar{y}\}] \quad (1.38)$$

Из выражения (1.38) непосредственно следуют формулы для суммирования, вычитания и умножения интервалов:

$$X + Y = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}],$$

$$X - Y = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$$

$$X \cdot Y = [\min\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \underline{y}, \bar{x} \cdot \bar{y}\}, \max\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \underline{y}, \bar{x} \cdot \bar{y}\}]$$

Более трудоемка операция деления интервалов. Если интервал Y не содержит нуля, то:

$$1/Y = [1/\bar{y}, 1/\underline{y}] \quad \text{и} \quad X/Y = X \times (1/Y)$$

Если интервал Y содержит нуль $0 \in Y$, $\underline{x} \Rightarrow X_1$, $\bar{x} \Rightarrow X_2$, то:

$$X/Y = \begin{cases} [\underline{x}/\underline{y}, \infty] & \text{если } \bar{x} \leq 0 \text{ и } \bar{y} = 0 \\ [-\infty, \bar{x}/\bar{y}] \cup [\underline{x}/\underline{y}, \infty] & \text{если } \bar{x} \leq 0 \text{ и } \underline{y} < 0 < \bar{y} \\ [-\infty, \bar{x}/\bar{y}] & \text{если } \bar{x} \leq 0 \text{ и } \underline{y} = 0 \\ [-\infty, \infty] & \text{если } \underline{x} < 0 < \bar{x} \\ [-\infty, \underline{x}/\underline{y}] & \text{если } \underline{x} \geq 0 \text{ и } \bar{y} = 0 \\ [-\infty, \underline{x}/\underline{y}] \cup [\bar{x}/\bar{y}, \infty] & \text{если } \underline{x} \geq 0 \text{ и } \underline{y} < 0 < \bar{y} \\ [\bar{x}/\bar{y}, \infty] & \text{если } \underline{x} \geq 0 \text{ и } \underline{y} = 0 \end{cases}$$

Отметим наиболее важные свойства приведенных интервальных арифметических операций.

Интервальные сложение и умножение ассоциативны и коммутативны. Формально это означает, что для $A, B, C \in I(R)$, где $I(R)$ - множество всех интервалов на множестве вещественных чисел R , имеют место равенства:

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A + B = B + A,$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, \quad A \cdot B = B \cdot A.$$

Роль нуля и единицы в интервальных операциях играют обычные числа 0 и 1, которые, как отмечалось, отождествляются с вырожденными интервалами $[0, 0]$ и $[1, 1]$. Другими словами,

$$A + 0 = 0 + A = A, \quad A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$$

для любого $A \in I(R)$. В дальнейшем точку для обозначения умножения будем, как правило, опускать: $A \cdot B = AB$.

Если один из операндов является невырожденным, т.е. имеет ненулевую ширину, то и результатом арифметической операции является невырожденный интервал. Исключение составляет умножение на $0 = [0, 0]$. Отсюда, в частности, следует, что для невырожденного интервала A не существует обратных по сложению и умножению элементов, так как если $A + B = 0$, $BC = 1$, то A , B , C должны быть, в силу вышесказанного, вырожденными. Иными словами, вычитание не обратное сложению, деление не обратное умножению. Следовательно, $A - A \neq 0$, $A/A \neq 1$, когда $\omega(A) > 0$. ($\omega(A) = \bar{a} - \underline{a}$ – ширина интервала.) При этом, естественно, всегда $0 \in A - A$, $1 \in A/A$.

Важной особенностью интервально-арифметических операций является невыполнение, в общем случае, закона дистрибутивности – т.е. равенство

$$A(B + C) = AB + AC \tag{1.39}$$

не всегда имеет место. Действительно, например, $[0, 1](1 - 1) = 0$, в то время как $[0, 1] - [0, 1] = [-1, 1]$. При этом всегда справедливо включение

$$A(B + C) \subset AB + AC, \tag{1.40}$$

называемое *субдистрибутивностью*. В самом деле, если, $d \in A(B+C)$, то это значит, что $d = a(b + c)$, где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Но $ab \in AB$, $ac \in AC$, следовательно, $d = ab + ac \in AB + AC$.

Отметим некоторые важные случаи, когда имеет место дистрибутивность арифметических операций и когда (1.40) совпадает с (1.39).

Будем называть интервал A нуль содержащим интервалом (н.с.- интервалом), если $\underline{a} < 0 < \bar{a}$. Положим, по определению,

$$\text{sign}(A) = \begin{cases} 1, & A > 0, \\ 0, & 0 \in A, \\ -1, & A < 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

В работе [54] доказано, что:

- 1) всегда справедливо (1.40);
- 2) если ширина интервала $A = 0$, или $B = [0, 0]$, или $C = [0, 0]$, то $A(B+C) = AB + AC$;
- 3) если A - н.с.- интервал, то $A(B+C) = AB + AC$ тогда и только тогда, когда $\text{sign}(B) = \text{sign}(C)$;
- 4) если $\underline{d} \geq 0$, где $D = [\underline{d}, \bar{d}] = BC$, то $A(B+C) = AB + AC$;
- 5) если B и C – симметричны, то $A(B+C) = AB + AC$.

Интервальная арифметика обладает таким важным свойством, как *монотонность по включению*. Это означает, что если $A \subset C$, $B \subset D$, то

$$\begin{aligned} A + B &\subset C + D, \\ A - B &\subset C - D, \\ AB &\subset CD, \\ A/B &\subset C/D \text{ (если } 0 \notin D). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Эти соотношения прямо вытекают из определения (1.38).

Пользуясь тем, что отношение включения транзитивно, мы приходим к следующему фундаментальному результату [265]:

Т е о р е м а 1.1. Если $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ является рациональным выражением от интервальных переменных X_1, X_2, \dots, X_n , т.е. конечной комбинацией интервалов X_1, X_2, \dots, X_n и конечного набора постоянных интервалов, соединенных интервальными арифметическими операциями, то из $X_i^{(1)} \subset X_i^{(2)}$, $i = \overline{1, n}$, следует:

$$F(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}) \subset F(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_n^{(2)}). \quad (1.43)$$

Теорема справедлива для любого набора интервальных чисел $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_n^{(2)}$, для которого интервальные арифметические операции в выражении имеют смысл (т.е. не встретится деление на интервал, содержащий нуль). Теорему 1.1 иногда называют основной теоремой интервальной арифметики.

Свойство монотонности по включению обобщается на более широкий класс функций.

Пусть f – (вещественно- или интервальнозначная) функция вещественных переменных x_1, x_2, \dots, x_n . *Интервальным расширением* функции f называется интервальнозначная функция F интервальных переменных X_1, X_2, \dots, X_n такая, что для вещественных аргументов имеет место равенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В работе [265] доказана важная теорема:

Т е о р е м а 1.2. Если F – монотонное по включению интервальное расширение функции f , то

$$\overline{f(X_1, X_2, \dots, X_n)} \subset F(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Графическая иллюстрация теоремы 1.2 представлена на рис. 1.5.

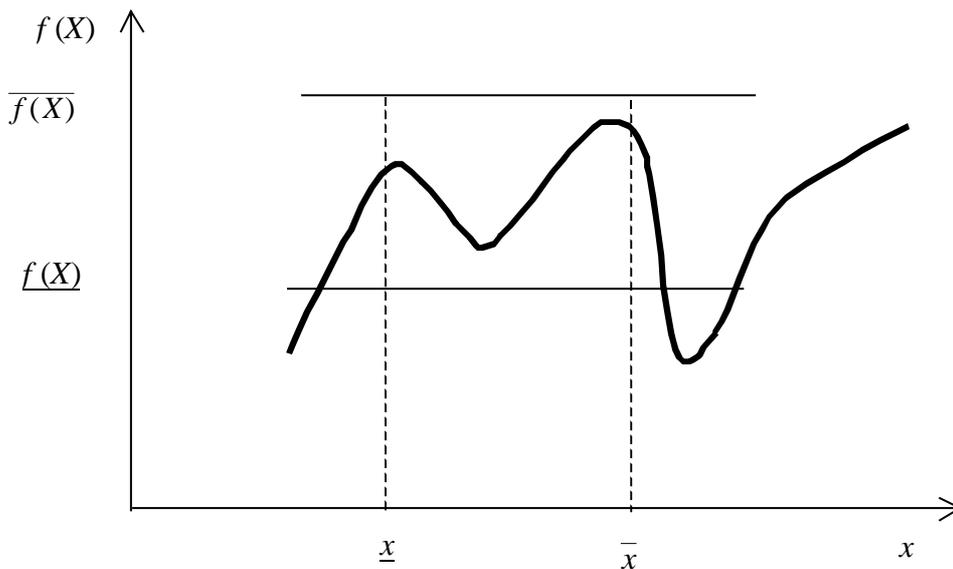


Рис.1.5. Иллюстрация основной теоремы интервального анализа

Рис. 1.5 является графической иллюстрацией важного следствия теоремы 1.2, заключающегося в возможности получения интервала возможных значений функции путем единичного интервального вычисления.

Для вещественной рациональной функции n вещественных переменных легко строится естественное интервальное расширение [54]. Оно получается, если все вещественные переменные заменить соответствующими интервальными, а вещественные

арифметические операции – интервально-арифметическими. Используя естественное интервальное расширение в соответствии с теоремой 1.2, можно получить нижние и верхние границы множества значений рациональной вещественной функции.

Рассмотрим «классический» для интервального анализа пример функции $f(x) = x(x-1)$. Естественным интервальным расширением ее является функция $F(X) = X(X-1)$. При $X = [0,1]$ имеем $F([0,1]) = [0,1]([0,1]-1) = [0,1]$. Очевидно, нетрудно найти интервал значений рассматриваемой вещественной функции $f(x)$ при изменении x в интервале $[0,1]$: $\overline{f}([0,1]) = \{x(x-1)|x \in [0,1]\} = [0,1/4]$. Мы видим, что $f([0,1]) \subset F([0,1])$ (как и должно быть), но $f([0,1]) \neq F([0,1])$. Это наиболее типичная ситуация в интервальном анализе.

В приведенном примере ширина итогового интервала при использовании «естественного» расширения оказывается в четыре раза большей, чем в случае использования обычной неинтервальной арифметики. Ясно, что это является негативным обстоятельством, и оно вызывает сомнение в эффективности использования интервальных расширений и интервальной арифметики для решения практических задач. Поэтому возникает задача нахождения более точных границ, в которые заключено объединенное расширение.

Представим функцию из нашего примера в несколько иной, тождественной, с точки зрения обычной математики, форме.

$$f(x) = x(x - 1) = 1/4 - (x - 1/2)^2.$$

В результате «естественного» интервального расширения в этом случае получим:

$$F(X) = F([0,1]) = 0.25 - ([0,1] - 0.5)^2 = [0, 0.5].$$

Таким образом, за счет изменения формы функции $f(x)$ путем тождественного преобразования удалось снизить ширину «естественного» интервального расширения в два раза. Отметим, что в выражении $f(x) = x(x - 1)$ переменная x встречается два раза, в то время как в соотношении $f(x) = 1/4 - (x - 1/2)^2$ только один раз.

Рассмотрим еще один модельный пример [256]:

$$f_1(x) = x(x + 1), f_2(x) = x * x + x, f_3(x) = x^2 + x, f_4(x) = (x + 1/2)^2 - 1/4.$$

С точки зрения обычной арифметики функции f_1, f_2, f_3, f_4 тождественны.

Рассмотрим их «естественные» расширения на интервале $[x] = [-1, 1]$:

$$[f_1]([x]) = [x]([x] + 1) = [-2, 2], \quad [f_2]([x]) = [x] * [x] + [x] = [-2, 2],$$

$$[f_3]([x]) = [x]^2 + [x] = [-1, 2], \quad [f_4]([x]) = ([x] + 1/2)^2 - 1/4 = [-1/4, 2].$$

Графически полученные результаты представлены на рис. 1.6.

Из рассмотренных примеров следует, что чем чаще в выражении для исходной вещественной функции встречается переменная, тем шире интервал, получаемый в результате «естественного» интервального расширения. Однако, это утверждение не носит абсолютного характера, например, в нашем примере интервальные расширения для f_1 и f_2 совпадают. В работе [219] предложены некоторые эвристические приемы, позволяющие снизить ширину итоговых интервалов, однако, автор отмечает, что в случае достаточно сложных реальных задач эти приемы неэффективны.

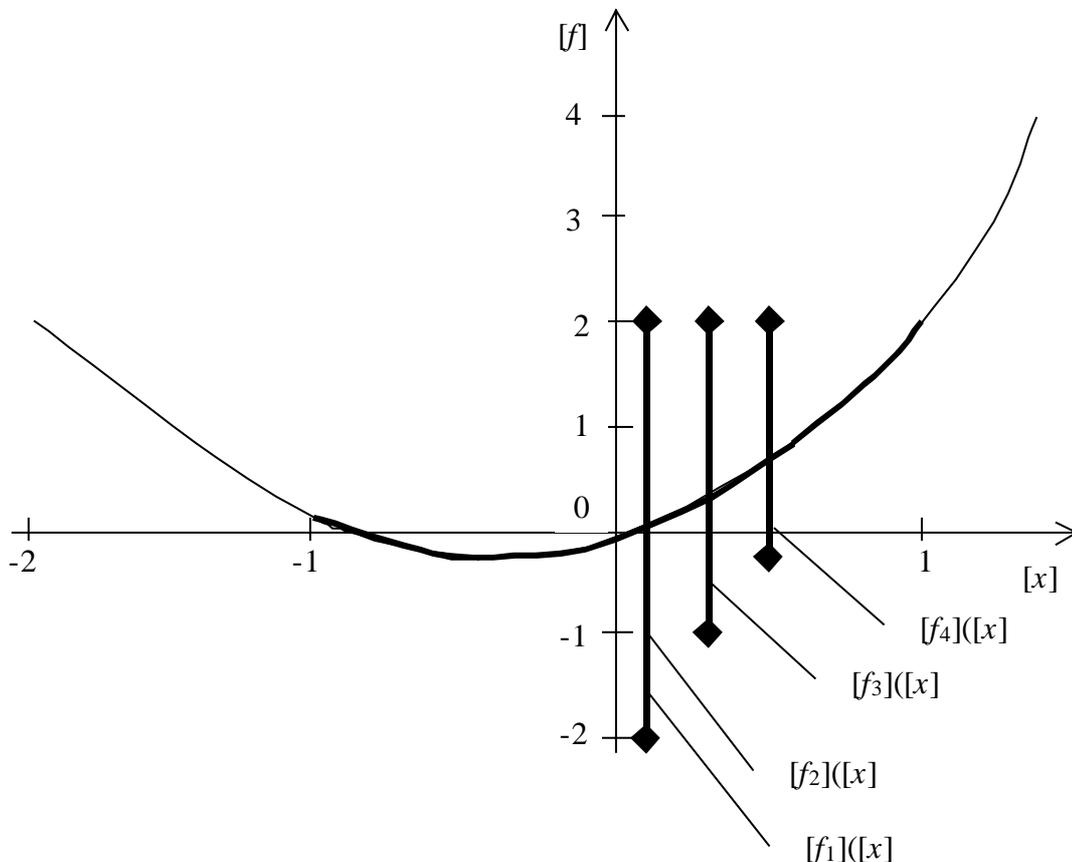


Рис.1.6. «Естественные» интервальные расширения на $[x] = [-1, 1]$ различных форм представления функции $f_1(x) = x(x + 1)$

Полностью проблема «естественного» интервального расширения решена только для линейных функций. В работе [265] для этого случая доказана теорема.

Т е о р е м а 1.3. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – рациональное выражение, в котором каждая переменная встречается не более одного раза и только в первой степени, $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – естественное интервальное расширение $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда

$$\bar{f}(X_1, X_2, \dots, X_n) = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

для любого набора (X_1, X_2, \dots, X_n) такого, что $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ имеет смысл.

Доказательство этого утверждения осуществляется с помощью теоретико-множественных рассуждений.

В настоящее время разработано достаточное число методик и численных алгоритмов, обеспечивающих существенное снижение итоговых интервалов для интервальных расширений вещественных функций произвольного вида. Наиболее широко применяемые методики описаны в [54, 256]. Следует отметить, что эффект снижения ширины итоговых интервалов достигается за счет увеличения количества вычислений в алгоритмах, реализующих эти методики. Наиболее надежным рецептом для решения проблемы роста ширины интервалов является использование как можно более узких исходных интервалов.

В [54, 256] подробно рассмотрены вопросы применения интервальной арифметики для решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнения, дифференциальных уравнений, глобальной оптимизации и пр.

В приложениях, например при решении задач оптимизации на основе интервальных целевых функций, большую роль играют операции сравнения интервалов. К сожалению, в монографиях, в том числе и в изданных в последнее время [256], вопросы сравнения интервалов или вообще не затронуты, или освящены слишком поверхностно. Так, в [54] утверждается, что если A, B - интервалы, то $B > A$, тогда и только тогда, когда $b > \bar{a}$, т.е. когда интервал B находится на числовой оси целиком правее интервала A . Подобный подход не удовлетворяет практическим потребностям, поскольку зачастую необходимо сравнивать взаимно пересекающиеся интервалы. Ввиду важности проблемы сравнения интервалов, и, особенно, нечетких интервалов, вернемся к ее более подробному анализу в п.п. 1.5.

§ 1.4. Взаимосвязь проблем арифметики нечетких чисел и интервального

анализа

Рассмотрим выполнение операций с нечеткими интервалами [332]. Эти операции весьма похожи на операции с обычными четкими интервалами. Однако при этом дополнительно необходимо учитывать значения функций принадлежности нечетким интервалам. В настоящее время в литературе теоретического характера для определения арифметических операций с нечеткими интервалами общепринятым является использование принципа расширения Л.Заде. При этом, если A , B и Z – нечеткие интервалы, то произвольная операция $@ = \{+, -, *, /\}$ может быть представлена в виде [332]:

$$Z = A @ B = \{z = x @ y, \mu(z) = \sup f(\mu(x), \mu(y)), \forall x \in A, \forall y \in B \}. \quad (1.44)$$

В выражении (1.44) f – функциональная зависимость, определяемая выбором конкретного варианта t -нормы или s -нормы. Введение операции \sup в (1.44) необходимо для выбора максимального значения конкретной реализации t -нормы или s -нормы для всех одинаковых значений $z \in Z$ (операция максимума в нашем случае соответствует логическому союзу «или»).

Среди множества возможных вариантов реализаций t -нормы или s -нормы для дальнейшего анализа выберем наиболее распространенные выражения:

$$f_1(z) = \min(\mu(x), \mu(y)); \quad (1.45)$$

$$f_2(z) = (\mu(x), \mu(y)) / 2; \quad (1.46)$$

$$f_3(z) = \mu(x) * \mu(y). \quad (1.47)$$

Такой подход к определению арифметических операций является прямым, соответствующим непосредственно базовым основам теории нечетких множеств и сводящимся к оперированию с функциями принадлежности. Способ свертки функций принадлежности, т.е. выбор конкретного варианта среди $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, является в настоящее время предметом оживленной научной дискуссии. Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки. Вариант $f_1(z)$, рассчитываемый по формуле (1.45), является наиболее жестким вариантом, поскольку он не допускает компенсации низких значений одной функции принадлежности за счет другой. В задачах оптимизации такая свертка приводит к отысканию

наилучшего среди наихудших решений. Поэтому эту свертку иногда называют обобщенным критерием максимального пессимизма. Ясно, что это не всегда отвечает сущности решаемой задачи, особенно, в тех случаях, когда желательно или необходимо каким-то образом учесть влияние каждого из рассматриваемых критериев на глобальный критерий. Свертки (1.46) и (1.47) также должны выбираться с учетом конкретных особенностей задач. Вопрос о выборе вида свертки (агрегирования) является весьма важным для практики и поэтому будет более подробно рассмотрен в главе II в контексте задач многокритериальной оценки качества и оптимизации.

Помимо прямого определения операций через функции принадлежности (1.45)-(1.47), как указано в параграфе 1.1, существует и концептуально иной подход к выполнению операций над нечеткими интервалами – разложение нечеткого интервала на α -уровни с дальнейшим использованием арифметических операций с обычными интервалами, соответствующими α -уровням. Разбиение на α -уровни является дискретизацией проблемы и, соответственно, вносит погрешности, однако очень часто дискретизация является единственным эффективным средством решения задач (например, для сложных систем нелинейных уравнений), которые не могут быть решены точными аналитическими методами. В литературе проблеме разбиения на α -уровни уделено недостаточное внимание и поэтому рассмотрим его более подробно.

Пусть существуют нечеткие интервалы A и B , тогда нечеткий интервал C , являющийся результатом арифметических операций над ними, представим в следующем виде:

$$C = A @ B = \bigcup_{\alpha} C_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} @ B_{\alpha}, \quad (1.48)$$

где C_{α} , A_{α} , B_{α} - α -уровни нечетких интервалов C , A и B соответственно, т.е. четкие интервалы с одинаковыми значениями функции принадлежности нечеткому интервалу; операция $@ = \{+, -, *, ./\}$.

Для практической реализации нечетко-интервальных операций (1.48) будем использовать трапецеидальную (четырёхреперную) форму интервалов (рис. 1.7), которые могут быть однозначно представлены квардуплиями своих реперных точек $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

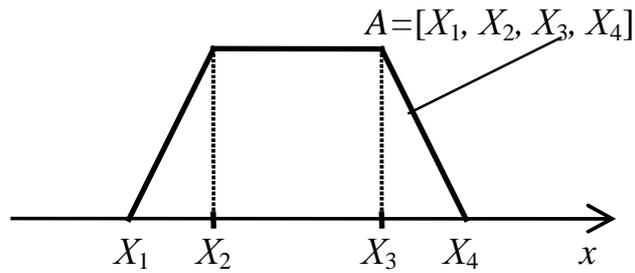


Рис. 1.7. Нечеткий трапецеидальный интервал, представленный квардуплем $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

В литературе отсутствуют сведения о сравнительных характеристиках использования двух рассматриваемых подходов в нечетко интервальной арифметике. Для анализа альтернативных способов были проведены непосредственно численные эксперименты над нечеткими интервалами $A = \{1, 3, 4, 5\}$ и $B = \{7, 8, 8.5, 9\}$, приведенными на рис. 1.8. При этом в случае реализации «классического» подхода использовалось генерирование равномерно распределенных случайных чисел внутри интервалов $[1,5]$ и $[7,9]$, т.е. внутри так называемых опорных множеств нечетких интервалов A и B соответственно. Были рассмотрены все три способа свертки функций принадлежности (1.45) - (1.47). Графическая иллюстрация результатов сложения данных интервалов обоими способами представлена на рис. 1.9 – 1.11. Аналогичные результаты получены для вычитания, умножения и деления интервалов.

На рисунках первый способ соответствует классическому подходу на основе выражения (1.44), второй способ - разложению на α -уровни (1.48). Поскольку полученные в результате многоэкстремальные нерегулярные функции принадлежности искомым результирующим нечетких интервалов невозможно интерпретировать каким-либо разумным способом, использование базового определения теории нечетких множеств (1.44) на практике просто неприменимо. Весьма похожие результаты в уменьшенном масштабе были получены в работе [277]. Полученные результаты, в сущности, отражают тот общеизвестный факт, что использование на практике наиболее общих и изящных в математическом смысле формулировок и положений требует, как правило, существенной конкретизации. Очень часто такие общие определения не находят применения в приложениях, оставаясь при этом удобными и полезными математическими структурами, позволяющими лучше понять внутреннюю логику теории, доказать необходимые теоремы и т.д. В то же время подход, основанный на разложении по α -уровням, дает вполне разумные результаты, которые, как

это следует из приведенных рисунков, в большинстве случаев являются гладкими верхними оценками результатов на основе выражений (1.44)-(1.47), за исключением аддитивной свертки функции принадлежности, когда результаты, полученные методом α -уровней, можно рассматривать скорее как усреднение результатов базового подхода.

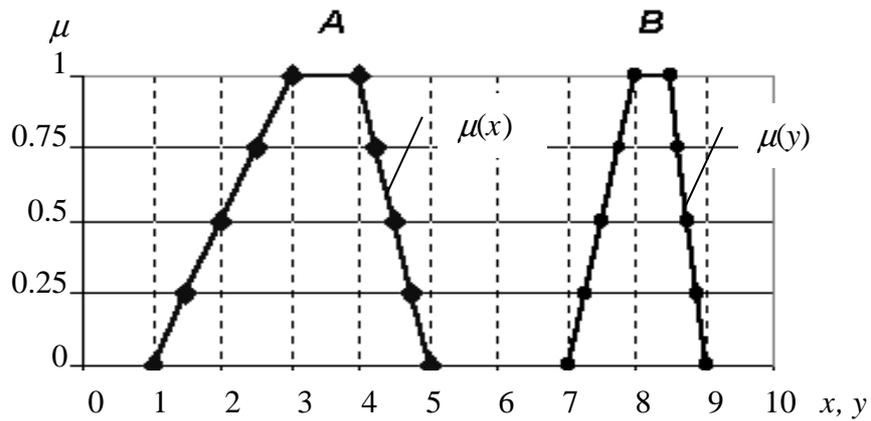


Рис. 1.8. Нечеткие интервалы A и B

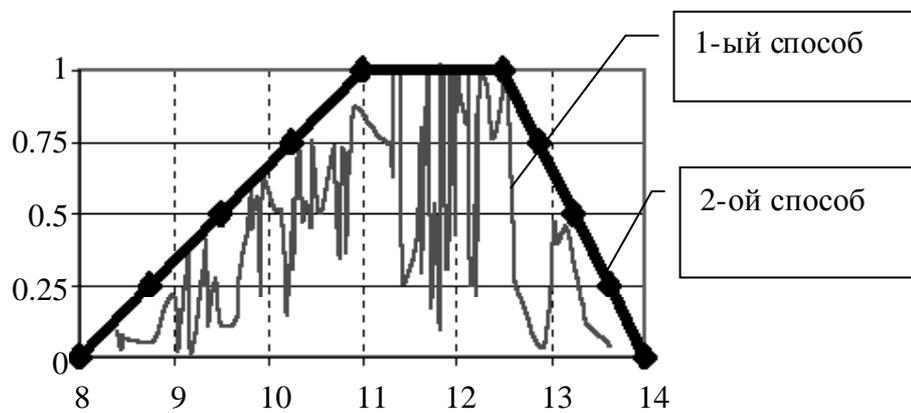


Рис. 1.9. Результаты сложения двух нечетких интервалов двумя способами (1-ый способ - при выборе свертки $f_1(z)$ по выражению (1.45), 2-ой способ – при разложении на α -уровни в соответствии с (1.48))

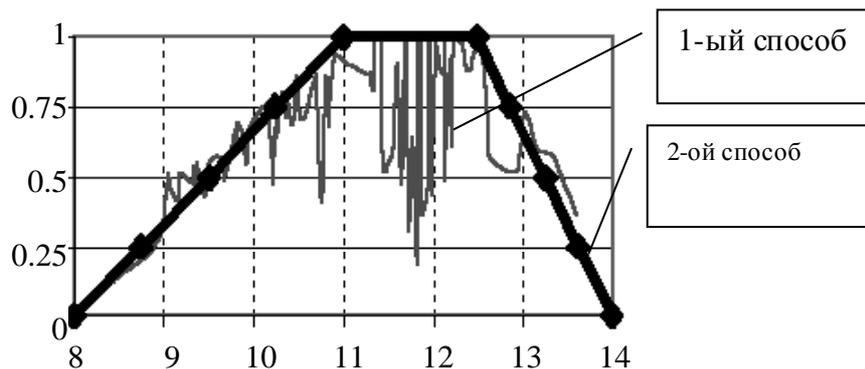


Рис. 1.10. Результаты сложения двух нечетких интервалов двумя способами (1-ый способ - при выборе свертки $f_2(z)$ по выражению (1.46), 2-ой способ – при разложении на α -уровни в соответствии с (1.48))

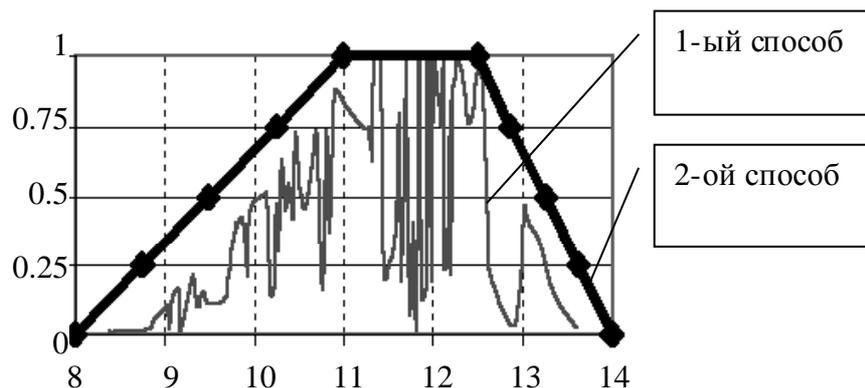


Рис. 1.11. Результаты сложения двух нечетких интервалов двумя способами (1-ый способ - при выборе свертки $f_3(z)$ (выражение (1.47)), 2-ой способ – при разложении на α -уровни в соответствии с (1.48))

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что наиболее конструктивным методом выполнения арифметических операций с нечеткими интервалами является метод разложения их на α -уровни с последующим оперированием с границами полученных четких интервалов. Ясно, что в этом случае проблемы нечетко-интервальной арифметики сводятся к проблемам прикладного интервального анализа.

Полученные результаты сопоставления двух альтернативных подходов к арифметическим действиям не охватывают операций сравнения четких и нечетких

интервалов. Рассмотрим эти вопросы более подробно.

§ 1.5. Операции сравнения четких и нечетких интервалов

1.5.1. Традиционные методы сравнения четких и нечетких интервалов

Существуют многочисленные различные формальные определения процедуры сравнения четких интервалов [205, 166, 250, 188, 222, 223, 265, 229, 179, 308, 176]. Некоторые из этих методов показали свою работоспособность, в том числе в достаточно сложных частных случаях. Но в то же время в литературе отсутствуют однозначные указания, позволяющие выбрать среди них наилучший. Существующие подходы к сравнению интервалов могут быть структурно представлены в виде трех групп. Первыми являются методы строгого качественного сравнения [205, 166, 250], опирающиеся на анализ диаграмм графического представления сравниваемых интервалов. Далее идут количественные методы, основанные на мерах расстояния между интервалами [188, 223, 222]. Наиболее распространенными являются методы, которые отвечают определенному синтезу количественных и качественных подходов [265, 229, 179, 308, 176].

Первая группа методов используется, в основном, для разрешения проблемы сравнения интервалов на уровне графических интерпретаций. Такие методы полезны для качественного анализа отношений между интервалами и при доказательстве некоторых теорем, однако, они не могут использоваться для сравнения интервалов на количественном уровне. Вторая группа методов представляет, как правило, лишь теоретический интерес. Главная проблема таких методов - недостаток конструктивной интерпретации расстояния между интервалами и нечеткими интервалами. Во многих случаях формально введенные меры, характеризующие расстояния между интервалами (например, расстояние Хаусдорфа), находятся в противоречии с интуитивным пониманием ситуации.

Третья группа анализируемых методов основана на методологии, предложенной в классической работе [265]. В настоящее время этот класс методов реализован как часть доступного программного обеспечения корпорации SUN [308,176], в котором воплощено множество практически полезных современных концепций интервальной арифметики.

Главная идея всех таких методов может быть представлена так: «интервал меньше, чем другой интервал, если содержит некоторые значения, меньшие, чем некоторые значения в другом интервале". Такое определение, конечно, слишком ограничено, чтобы охватить все

возможные случаи взаиморасположения интервалов. Поэтому вводится три главных класса оценок отношений между интервалами: Безусловное (неравенство), Возможное (неравенство), Неравенство в теоретико-множественном смысле. Формализация этих отношений имеет следующий вид.

Пусть $\bullet \in \{ <, \leq, \geq, >, =, \neq \}$.

Тогда $X \bullet Y = \text{безусловно верно}$, если $x \bullet y = \text{верно}$ для $\forall x \subset X$ и $y \subset Y$.

Например, $X = Y$ *безусловно* верно, если $\underline{x} = \underline{y}$ и $\bar{x} = \bar{y}$.

$X \bullet Y = \text{возможно}$ верно, если по крайней мере $\exists x \subset X$ и $y \subset Y$ такие, что $x \bullet y = \text{верно}$.

Например, $X = Y$ *возможно* верно, если $\underline{x} \leq \underline{y}$ и $\bar{x} \geq \bar{y}$.

$X \bullet Y$ выполняется в теоретико-множественном смысле, если X и Y рассматриваются как некоторые подмножества универсального множества. При этом могут быть использованы различные подходы. Например, полагая, что X и Y являются выборками случайных величин, можно использовать метод, основанный на теореме Колмогорова-Смирнова или другие непараметрические методы сравнения.

Для реализации этих отношений, в [308] предложен набор функций, доставляющих в качестве результата сравнения интервалов Булевы (*Boolean*) значения. Фактически метод обеспечивает лишь качественные результаты сравнения интервалов, выраженные в вербальной форме. Лингвистический термин "Возможно" имеет на практике широкий, но конечный (как следует из ограниченного характера (дискретности) любого естественного языка) набор нюансов. В свою очередь, каждый из "нюансов" качественно отражает некоторую группу отношений интервалов, имеющих одинаковый смысл, но отличающихся количественно.

В настоящей книге предложен метод сравнения интервалов, в определенной мере развивающий подход, предложенный в [308], позволяющий ввести единственный количественный параметр, с которым можно обращаться как с вероятностью (или возможностью) того, что один из интервалов меньше, больше или равен другому интервалу.

Рассмотрим кратко основные подходы к количественному сравнению нечетких интервалов [160, 229, 179, 222, 195, 321, 329, 284, 334, 174, 203]. В большинстве случаев для оценки степени неравенства нечетких интервалов (чисел) используются показатели в форме некоторых количественных индексов. В некоторых случаях одновременно используется даже несколько индексов. Например, в [45,195] предложены четыре индекса неравенства и

три индекса равенства. Анализ наиболее известных подходов к решению проблемы сравнения нечетких интервалов не позволяет выделить какой-либо наилучший метод [174, 203].

Существующие подходы к сравнению нечетких интервалов могут быть разделены на три группы: качественные методы [229, 179]; количественные методы, использующие индексы, полученные на основе базовых определений теории нечетких множеств [160, 222, 195]; и группа методов, основанных на представлении нечетких интервалов (чисел) в виде упорядоченных совокупностей α -уровней [321, 329, 284, 334].

Последняя группа методов имеет существенные достоинства. Они могут использоваться без ограничений практически для любой формы функции принадлежности, что весьма важно для практики. Кроме того, использование разложения на α -уровни позволяет подключить к решению задач мощный аппарат математики обычных (четких) интервалов.

Наиболее полный обзор литературы, посвященной проблеме сравнения нечетких интервалов приведен в [310], где предложена новая конструктивная классификация методов и желаемых свойств, которыми должны обладать операции сравнения нечетких интервалов.

Рассмотренные подходы, а также сделанные в параграфе 1.4 выводы, позволяют сформулировать стратегию разработки общей методики количественного сравнения интервалов и нечетких интервалов. Нечеткие интервалы целесообразно представлять совокупностями α -уровней. Последнее позволяет свести проблемы сравнения нечетких интервалов к сравнению четких интервалов на соответствующих α -уровнях.

Следовательно, первой задачей анализа является построение конструктивного способа сравнения четких интервалов. Для ее решения будем использовать методику, основанную на рассмотрении четких интервалов, как интервалов равномерно распределенных случайных чисел.

1.5.2. Теоретико-вероятностный подход к формализации отношений в классах четких и нечетких интервалов

В [122, 294] предложен метод сравнения четких интервалов на основе теоретико-вероятностного подхода к распределению случайных величин, позволяющий определить вероятность, с которой один интервал больше другого а также вероятность их равенства.

Задачу сравнения интервалов $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$ сформулируем как задачу определения вероятности $P(B > A)$, под которой будем понимать вероятность того, что случайная точка b_i из интервала B будет больше случайной точки a_i из интервала A , т.е. $P(B > A) = P(B \ni b_i > a_i \in A)$.

Пусть $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$ – независимые интервалы, и $a \in [a_1, a_2]$, $b \in [b_1, b_2]$ – случайные величины, равномерно распределенные на этих интервалах. Поскольку речь идет о четких интервалах, никакое другое распределение, кроме равномерного, не будет иметь смысла. Если сравниваемые интервалы не имеют общих областей, то проблемы их сравнения не вызывают трудностей. В случае пересечения интервалов образуются подинтервалы, играющие важную роль в расчете вероятностных характеристик. Фактически имеются два нетривиальных случая, представленных на рис. 1.12. Например, в случае пересечения интервалов попадание случайных величин $a \in [a_1, a_2]$, $b \in [b_1, b_2]$ в подинтервалы $[a_1, b_1]$, $[b_1, a_2]$, $[b_1, a_2]$, $[a_1, b_1]$ можно рассматривать как группу некоторых независимых случайных событий.

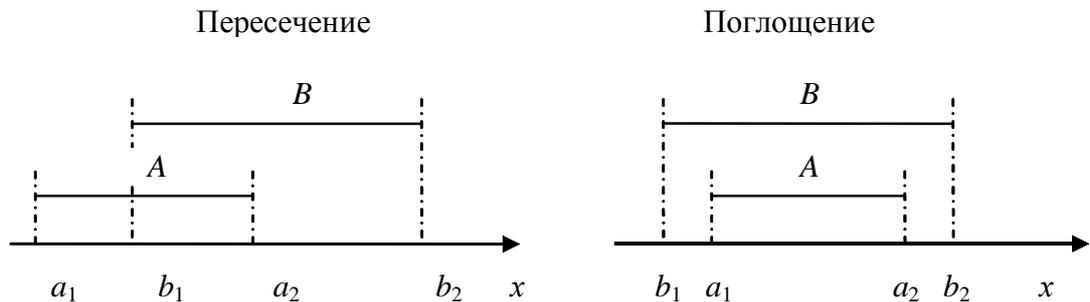


Рис. 1.12. Нетривиальные случаи взаимного расположения интервалов

Определим события $H_k: a \in A_i, b \in B_j$, где A_i и B_j – некоторые подинтервалы интервалов A и B , такие, что $A = \bigcup_m A_i$, $B = \bigcup_l B_j$. Отметим, что H_k представляют собой полную группу событий, описывающую все случаи попадания случайных величин a и b в различные подинтервалы A_i и B_j , соответственно.

Пусть $P(H_k)$ – вероятность события H_k и $P(B > A / H_k)$ – условная вероятность события $B > A$ при выполнении H_k .

Тогда для расчета полной вероятности получаем:

$$P(B > A) = \sum_k^n P(H_k) \cdot P(B > A / H_k). \quad (1.49)$$

Поскольку мы имеем дело с равномерными распределениями случайных величин a и b , вероятности $P(H_k)$ могут быть легко получены из геометрических соображений.

Для случая, представленного на рис. 1.12 (пересечение интервалов), мы имеем группу из четырех событий:

$$\begin{aligned} H_1: a \in [a_1, b_1] \ \& \ b \in [b_1, a_2], \quad H_2: a \in [a_1, b_1] \ \& \ b \in [a_2, b_2], \\ H_3: a \in [b_1, a_2] \ \& \ b \in [b_1, a_2], \quad H_4: a \in [b_1, a_2] \ \& \ b \in [a_2, b_2]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Поскольку в (1.50) все пары событий типа $a \in [a_1, b_1]$ и $b \in [b_1, a_2]$ независимы, вероятности событий $P(H_k)$ рассчитаем как произведения вероятностей попадания каждого подинтервала в интервалы A и B . Так как речь, по-прежнему, идет о равномерно распределенных случайных событиях, необходимые выражения легко получим из геометрических соображений:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{b_1 - a_1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{a_2 - b_1}{b_2 - b_1}, & P(H_2) &= \frac{b_1 - a_1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{b_2 - a_2}{b_2 - b_1}, \\ P(H_3) &= \frac{a_2 - b_1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{a_2 - b_1}{b_2 - b_1}, & P(H_4) &= \frac{a_2 - b_1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{b_2 - a_2}{b_2 - b_1}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Необходимо сделать ряд комментариев относительно события H_3 . Очевидно, H_3 является свидетельством одновременного наступления событий $a \in [b_1, a_2]$ и $b \in [b_1, a_2]$. Поскольку для случая пересечения интервалов (рис. 1.12) всегда справедливо $a_2 \leq b_2$, выполнение $A > B$ невозможно, однако событие $A = B$ при этом не исключается и может иметь ненулевую вероятность. В рассматриваемой ситуации можно сделать два различных допущения о вероятностях интервальных неравенств, индуцируемых событием H_3 . В результате получим две группы выражений для расчета степеней неравенств интервалов, которые будем называть “мягкими” и “жесткими” отношениями.

“Мягкие” отношения.

Полагаем, что при условии реализации события H_3 шансы выполнения событий $A=B$ и $A < B$ в случае пересечения интервалов A и B равны, что эквивалентно $P(B > A/H_3) = P(A = B/H_3) = 0.5$. Поэтому для условных вероятностей получаем:

$$P(B > A / H_1) = 1, P(B > A / H_2) = 1, P(B > A / H_3) = \frac{1}{2}, P(B > A / H_4) = 1.$$

$$P(B = A / H_1) = 0, P(B = A / H_2) = 0, P(B = A / H_3) = \frac{1}{2}, P(B = A / H_4) = 0. \quad (1.52)$$

Подставляя (1.51) и (1.52) в (1.49), окончательно получим:

$$P(B > A) = 1 - \frac{1}{2} \frac{(a_2 - b_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \quad (1.53)$$

$$P(B = A) = \frac{1}{2} \frac{(a_2 - b_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \quad (1.54)$$

Легко проверяется, что $P(B > A) + P(B = A) = 1$, т.е. введенные операции сохраняют основное свойство вероятностей.

В асимптотическом пределе при $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$, т.е. когда $A \equiv B$, получаем: $P(B > A) = P(B = A) = 1/2$. С одной стороны это представляется неверным, поскольку в случае $A \equiv B$ представляется естественным, что $P(B > A) = 0$, $P(B = A) = 1$. С другой стороны, мы имеем дело не с обычными числами, а интервалами. Поэтому факт интервального тождества $A \equiv B$ может, вообще говоря, свидетельствовать как о событии $B > A$, так и о событии $B = A$. Подчеркнем, что это, вообще говоря, спорное утверждение можно рассматривать исключительно в контексте сравнения интервальных данных.

“Жесткие” отношения.

Полагаем, что для пересекающихся интервалов событие H_3 не свидетельствует о том, что $A < B$, однако является удовлетворительным свидетельством того, что $A = B$. Таким образом, $P(B > A / H_3) = 0$ и $P(A = B / H_3) = 1$ и для условных вероятностей получаем:

$$P(B > A / H_1) = 1, P(B > A / H_2) = 1, P(B > A / H_3) = 0, P(B > A / H_4) = 1.$$

$$P(B = A / H_1) = 0, P(B = A / H_2) = 0, P(B = A / H_3) = 1, P(B = A / H_4) = 0. \quad (1.55)$$

Подставляя (1.51) и (1.55) в (1.49), получим:

$$P(B > A) = 1 - \frac{(a_2 - b_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}, \quad (1.56)$$

$$P(B = A) = \frac{(a_2 - b_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}. \quad (1.57)$$

Очевидно, что $P(B > A) + P(B = A) = 1$.

В случае $A \equiv B$ получаем: $P(B > A) = 0$, $P(B = A) = 1$, что не требует дополнительной интерпретации и выглядит значительно естественнее, чем результат, полученный в этом асимптотическом случае для “мягких” отношений.

Для упрощения дальнейшего анализа рассмотрим другой более простой, но столь же точный способ вывода вероятностей ($B > A$), $P(B = A)$.

Легко проверить, что для случая пересечения интервалов имеет место равенство:

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = 1. \quad (1.57)$$

Для “мягких” отношений справедливо:

$$P(B > A / H_1) = 1, P(B > A / H_2) = 1, P(B > A / H_3) = \frac{1}{2}, P(B > A / H_4) = 1.$$

Поэтому для полной вероятности, используя (1.57), получаем:

$$P(B > A) = P(H_1) + P(H_2) + 0.5P(H_3) + P(H_4) = 1 - 0.5P(H_3) = 1 - \frac{1}{2} \frac{(a_2 - b_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}. \quad (1.58)$$

Легко заметить, что выражения (1.53) и (1.58) тождественны. Поэтому в дальнейшем анализе мы будем использовать именно этот упрощенный способ вывода выражений для вероятностей интервальных отношений.

Рассмотрим случай поглощения интервалов (рис. 1.12). В этом случае могут иметь место три независимых события:

$$H_1: a \in [a_1, a_2] \ \& \ b \in [b_1, a_1], \quad H_2: a \in [a_1, a_2] \ \& \ b \in [a_1, a_2],$$

$$H_3: a \in [a_1, a_2] \& b \in [a_2, b_2], \quad (1.59)$$

Соответствующие вероятности легко выводятся из геометрических соображений:

$$P(H_1) = \frac{a_1 - b_1}{b_2 - b_1}, P(H_2) = \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}, P(H_3) = \frac{b_2 - a_2}{b_2 - b_1}. \quad (1.60)$$

Поскольку $b_1 \leq a_1$, в этом случае возможно $A > B$. Например, очевидно, что неравенство $A > B$ выполняется, если $b_1 < a_1$ и $b_2 = a_2$.

“Мягкие” отношения.

“Проблемным” событием является событие H_2 . Положим, что в случае его реализации, события $A < B$, $A = B$ и $A > B$ имеют равные шансы, т. е.:

$$P(A < B / H_2) = P(A = B / H_2) = P(A > B / H_2) = \frac{1}{3} P(H_2).$$

Как следствие, для полных вероятностей получаем:

$$P(A < B) = \frac{1}{3} P(H_2) + P(H_3) = \frac{1}{3} \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} + \frac{b_2 - a_2}{b_2 - b_1}, \quad (1.61)$$

$$P(A = B) = \frac{1}{3} P(H_2) = \frac{1}{3} \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}, \quad (1.62)$$

$$P(A > B) = \frac{1}{3} P(H_2) + P(H_1) = \frac{1}{3} \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} + \frac{a_1 - b_1}{b_2 - b_1}. \quad (1.63)$$

Легко проверяется, что $P(A < B) + P(A = B) + P(A > B) = 1$.

В асимптотическом случае $A \equiv B$ получаем: $P(A < B) = P(A = B) = P(A > B) = \frac{1}{3}$.

Последний результат трудно интерпретировать разумным образом.

В случае дегенерированного интервала A , т.е. когда $a_1 = a_2 = a$, из (1.61)-(1.63)

получаем: $P(A < B) = \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}$, $P(A > B) = \frac{a - b_1}{b_2 - b_1}$ и $P(A = B) = 0$, что вполне соответствует нашим интуитивным представлениям.

Сделаем некоторые комментарии к представленным результатам сравнения интервалов. Если B является интервалом $[b_1, b_2]$, ($b_1 < b_2$) и a – действительное число, то выражение $B = a$ не имеет смысла, поскольку невозможно одновременное выполнение условий $b_1 = a$ и $b_2 = a$. Поэтому $P(B = a) = 0$. С другой стороны, выражение $B < a$ может быть использовано в анализе, поскольку, например, в случае $b_2 < a$, должно выполняться $P(B < a) = 1$. Ясно, что случай $b_1 \leq a \leq b_2$ также может иметь место и вероятность $P(B < a)$ может легко рассчитываться.

Нетривиальная ситуация имеет место при оценке вероятности равенства $P(A = B)$. Простейшим решением вопроса является введение «бескомпромиссных» правил тип: " $A = B$ тогда и только тогда, когда $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$ ". Однако использование интервального или нечетко-интервального расширения в задачах моделирования и оптимизации неизбежно приводит к необходимости соответствующего расширения ограничений типа равенства. Ясно, что при решении конкретных задач 100%-ное удовлетворение таким ограничениям, т.е. выполнение условия $P(A = B) = 1$, практически невозможно, однако в рамках нашего вероятностного подхода разработаны более мягкие «компромиссные» правила оценки равенства интервалов. Фактически это означает, что равенство интервалов в рамках рассматриваемого вероятностного подхода не эквивалентно их тождеству, т.е. невыполнение одного или всех условий $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$ не влечет за собой нулевой оценки вероятности равенства интервалов, т.е. $P(A = B) \neq 0$. Интересным результатом, отмеченным также другими авторами [310], является тот факт, что $P(A = B) = 1$, если A и B являются симметричными относительно одной и той же точки интервалами. При этом ширина интервалов не имеет значения. По-видимому, это является отражением асимптотических свойств интервальной арифметики, трансформирующейся в обычную арифметику по мере уменьшения ширины рассматриваемых интервалов.

“Жесткие” отношения.

Полагаем, что событие H_2 свидетельствует только о равенстве интервалов $A=B$, событие H_1 о том, что $A>B$ и H_3 подтверждает $A<B$. Следовательно, полные вероятности получаются следующим образом:

$$P(A < B) = P(H_3) = \frac{b_2 - a_2}{b_2 - b_1}, \quad (1.64)$$

$$P(A = B) = P(H_2) = \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}, \quad (1.65)$$

$$P(A > B) = P(H_1) = \frac{a_1 - b_1}{b_2 - b_1}. \quad (1.66)$$

Очевидно, что $P(A < B) + P(A = B) + P(A > B) = 1$.

В асимптотическом случае $A \equiv B$ из (1.64)-(1.66) следует: $P(A < B) = P(A > B) = 0$, $P(A = B) = 1$. Таким образом, в случае использования “жестких” отношений вместо “мягких” интервальные равенство и неравенства в асимптотическом пределе $A \equiv B$ взаимно исключаются, что свидетельствует о методической обоснованности использования именно “жестких” отношений

В другом асимптотическом случае $a_1 = a_2 = a$ из (1.64)-(1.66) получаем такие же выражения, как и при использовании “мягких” отношений:

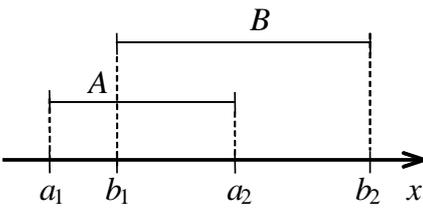
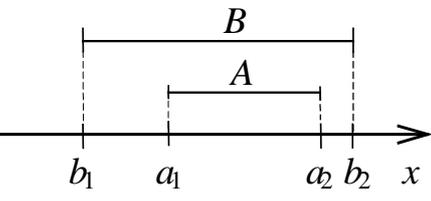
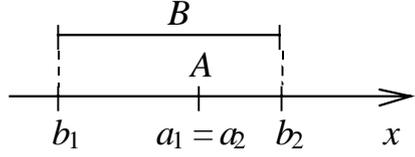
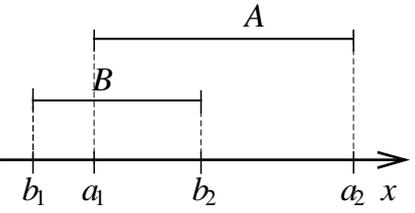
$$P(A < B) = \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}, P(A > B) = \frac{a - b_1}{b_2 - b_1}, P(A = B) = 0. \quad (1.67)$$

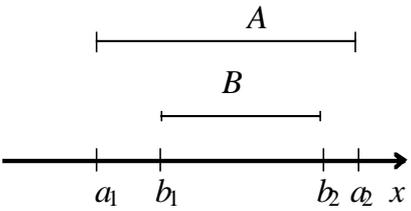
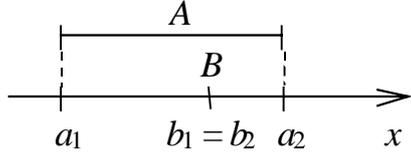
Легко заметить, что (1.67) представляют собой выражения для расчета вероятностей неравенства интервалов и действительных чисел.

Полученные выражения для сравнения интервалов представлены в таблице 1.1. При этом в таблице опущены очевидные случаи отсутствия пересечений.

Таблица 1.1. Выражения для вероятностной оценки отношений между интервалами, а также между интервалами и действительными числами

Случай	$P(A > B)$	$P(A = B)$	$P(A < B)$
--------	------------	------------	------------

<p>1.</p> 	<p>“Мягкие” отношения</p> $1 - \frac{1}{2} \frac{(a_2 - b_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $1 - \frac{(a_2 - b_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{1}{2} \frac{(a_2 - b_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{(a_2 - b_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$	<p>“Мягкие” отношения</p> 0 <p>”Жесткие” отношения</p> 0
<p>2.</p> 	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{1}{3} \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} + \frac{b_2 - a_2}{b_2 - b_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{b_2 - a_2}{b_2 - b_1}$	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{1}{3} \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{1}{3} \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} + \frac{a_1 - b_1}{b_2 - b_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{a_1 - b_1}{b_2 - b_1}$
<p>3.</p>  <p>$a_1 = a_2 = a$</p>	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}$	<p>“Мягкие” отношения</p> 0 <p>”Жесткие” отношения</p> 0	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{a - b_1}{b_2 - b_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{a - b_1}{b_2 - b_1}$
<p>4.</p> 	<p>“Мягкие” отношения</p> $1 - \frac{1}{2} \frac{(b_2 - a_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $1 - \frac{(b_2 - a_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{1}{2} \frac{(b_2 - a_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{(b_2 - a_1)^2}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$	<p>“Мягкие” отношения</p> 0 <p>”Жесткие” отношения</p> 0

<p>5.</p> 	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{1}{3} \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} + \frac{a_2 - b_2}{a_2 - a_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{a_2 - b_2}{a_2 - a_1}$	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{1}{3} \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{1}{3} \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} + \frac{b_1 - a_1}{a_2 - a_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{b_1 - a_1}{a_2 - a_1}$
<p>6.</p>  <p>$b_1 = b_2 = b$</p>	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{a_2 - b}{a_2 - a_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{a_2 - b}{a_2 - a_1}$	<p>“Мягкие” отношения</p> 0 <p>”Жесткие” отношения</p> 0	<p>“Мягкие” отношения</p> $\frac{b - a_1}{a_2 - a_1}$ <p>”Жесткие” отношения</p> $\frac{b - a_1}{a_2 - a_1}$

На рис. 1.13 графически представлены зависимости вероятностей $P(A > B)$ и $P(B > A)$ от взаиморасположения интервалов A и B . Первый график отвечает случаю 4 табл. 1.1. Границы интервала A фиксированы $\{a_1 = 11, a_2 = 21\}$, в то время как интервал B перемещается относительно интервала A слева направо. Его ширина $b_2 - b_1$ постоянна и равна 4, при этом левая граница b_1 изменяется от значения, равного 7, до значения, равного 21. Видно, что при перемещении интервала B слева направо относительно интервала A вероятности $P(A > B)$ и $P(B > A)$ нелинейно зависят от положения левой границы интервала B . Вторым графиком на рис. 1.13 соответствует случаю 6 табл. 1.1, когда интервал $A = \{11, 21\}$, а интервал B вырожден в точку $B = \{b\}$, $11 \leq b \leq 21$. В этом случае при перемещении вырожденного интервала B слева направо относительно интервала A , получаем линейную зависимость вероятностей $P(A > B)$ и $P(B > A)$ от положения точки B относительно интервала A .

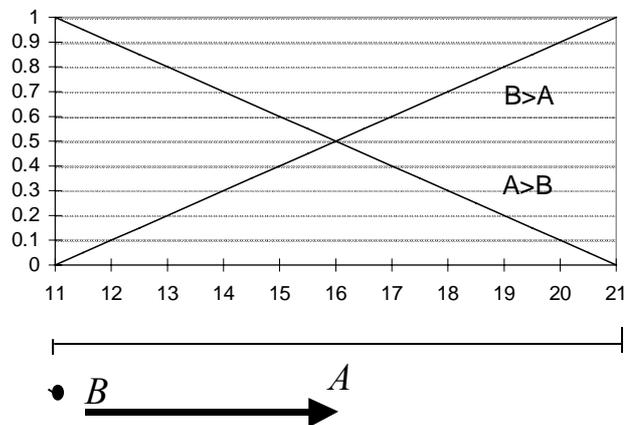
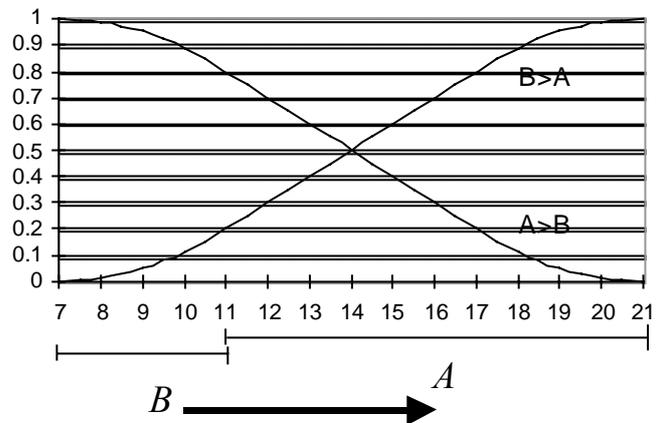


Рис. 1.13. Зависимости $P(A>B)$ и $P(B>A)$ от взаиморасположения и ширины интервалов

Представленная методика разработана для случая сравнения двух интервалов. Ее результаты применимы и для выбора максимального /минимального/ интервала из группы анализируемых интервалов (ранжирование группы интервалов). Для этого можно использовать модификацию классического алгоритма сортировки, заменяя в нем операторы сравнения действительных чисел описанными выше операторами сравнения интервалов.

Так, алгоритм отыскания максимума в группе интервалов можно представить следующим образом:

Алгоритм выбора максимума x_{max} в группе интервалов x_1, x_2, \dots, x_n ;

1	$x_{max} := x_1$
2	for $i:= 2$ to n
3	if $P(x_i > x_{max}) > 0.5$
4	$x_{max} := x_i$

С помощью этого алгоритма отыскивается максимальный интервал, однако не получается никакой информации о вероятности, с которой интервал x_{max} является максимальным. Такая информация может иметь большое значение в задачах принятия решений (оценки альтернатив), когда лица, принимающие решения в условиях интервальной неопределенности, желали бы количественно оценить степень адекватности (доверия) принимаемых решений. Для решения проблемы ранжирования группы интервалов в рамках описанного выше теоретико-вероятностного подхода предложим модификацию разработанной выше методики.

Рассмотрим некоторое множество независимых интервалов $\Omega = \{I_1, I_2, I_3, \dots, I_n\}$, которые будем рассматривать как области реализации равномерно распределенных случайных чисел. Вероятность существования максимального интервала I_i , $i = 1 \dots n$ является вероятностью того, что случайная величина x_{I_k} , принадлежащая этому интервалу, окажется больше случайных величин x_{I_l} , $l \neq k$, принадлежащих остальным интервалам. Следовательно, имеем: $P(\max(I_1, I_2, \dots, I_n) = I_i) = P(\max(x_{I_1}, x_{I_2}, \dots, x_{I_n}) = x_{I_i})$, где $x_{I_1}, x_{I_2}, \dots, x_{I_n}$ случайные величины, принадлежащие интервалам I_1, I_2, \dots, I_n соответственно.

Для практики проблемными являются только ситуации взаимного пересечения или включения интервалов. В результате пересечений и включений образуется множество подинтервалов, которые являются главным предметом анализа.

Рассмотрим следующие события:

„ X ” – если $\max(x_{I_1}, x_{I_2}, \dots, x_{I_n}) = x_{I_i}$;

„ Y_k ” – если $x_{I_1}, x_{I_2}, \dots, x_{I_n}$ находятся в подинтервалах $p_{I_1}^{j_1}, p_{I_2}^{j_2}, \dots, p_{I_n}^{j_n}$, образовавшихся в результате пересечения интервалов $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$, причем $I_1 = \bigcup_{j_1} p_{I_1}^{j_1}$, $I_2 = \bigcup_{j_2} p_{I_2}^{j_2}$, ...

$$I_n = \bigcup_{j_n} p_{I_n}^{j_n},$$

где $j_1 = 1 \dots m_1$, $j_2 = 1 \dots m_2$, ... $j_n = 1 \dots m_n$; m_1, m_2, \dots, m_n - количества подинтервалов в интервалах $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ соответственно.

В свою очередь, событие Y_k реализуется, когда имеют место события $Y_{p_{I_1}^{j_1}}, Y_{p_{I_2}^{j_2}}, \dots, Y_{p_{I_n}^{j_n}}$,

где

„ $Y_{p_{I_1}^{j_1}}$ ” – событие, соответствующее $x_{I_1} \in p_{I_1}^{j_1} \in I_1$.

„ $Y_{p_{I_2}^{j_2}}$ ” – событие, соответствующее $x_{I_2} \in p_{I_2}^{j_2} \in I_2$.

...

„ $Y_{p_{I_n}^{j_n}}$ ” – событие, соответствующее $x_{I_n} \in p_{I_n}^{j_n} \in I_n$.

Рассмотрим следующие вероятности:

$P(Y_k)$ - вероятность того, что $x_{I_1}, x_{I_2}, \dots, x_{I_n}$ находятся в описанных выше подинтервалах;

$P(X \cap Y_k)$ - вероятность того, что $\max(x_{I_1}, x_{I_2}, \dots, x_{I_n}) = x_{I_i}$ и одновременно того, что $x_{I_1}, x_{I_2}, \dots, x_{I_n}$ находятся в описанных выше подинтервалах;

$P(X / Y_k)$ - условная вероятность того, что если $x_{I_1}, x_{I_2}, \dots, x_{I_n}$ находятся в описанных выше подинтервалах, то $\max(x_{I_1}, x_{I_2}, \dots, x_{I_n}) = x_{I_i}$.

Из общего выражения для условной вероятности

$$P(X / Y_k) = \frac{P(X \cap Y_k)}{P(Y_k)},$$

получаем:

$$P(X \cap Y_k) = P(X / Y_k) \cdot P(Y_k).$$

В сформулированной задаче требуется отыскать вероятность

$$P(\max(I_1, I_2, \dots, I_n) = I_i) = \sum_k P(X \cap Y_k)$$

или, что эквивалентно

$$P(\max(I_1, I_2, \dots, I_n) = I_i) = \sum_k P(X / Y_k) \cdot P(Y_k), \quad (1.68)$$

где $P(Y_k) = P\left(Y_{p_{I_1}^{j_1}}\right) \cdot P\left(Y_{p_{I_2}^{j_2}}\right) \cdot \dots \cdot P\left(Y_{p_{I_n}^{j_n}}\right)$.

Вероятности $P(X / Y_k)$, $P(Y_{p_{i_1}^j})$, $P(Y_{p_{i_2}^j})$, ... $P(Y_{p_{i_n}^j})$ могут быть достаточно просто найдены из основе геометрических построений.

Рассмотрим конкретный пример сравнения трех интервалов (рис. 1.14).

В результате пересечения исходных интервалов получим следующую группу подинтервалов:

$$p_B^1 = [b_1, a_1], \quad p_A^1 = p_B^2 = [a_1, c_1], \quad p_A^2 = p_B^3 = p_C^1 = [c_1, b_2], \quad p_A^3 = p_C^2 = [b_2, c_2], \quad p_A^4 = [c_2, a_2].$$

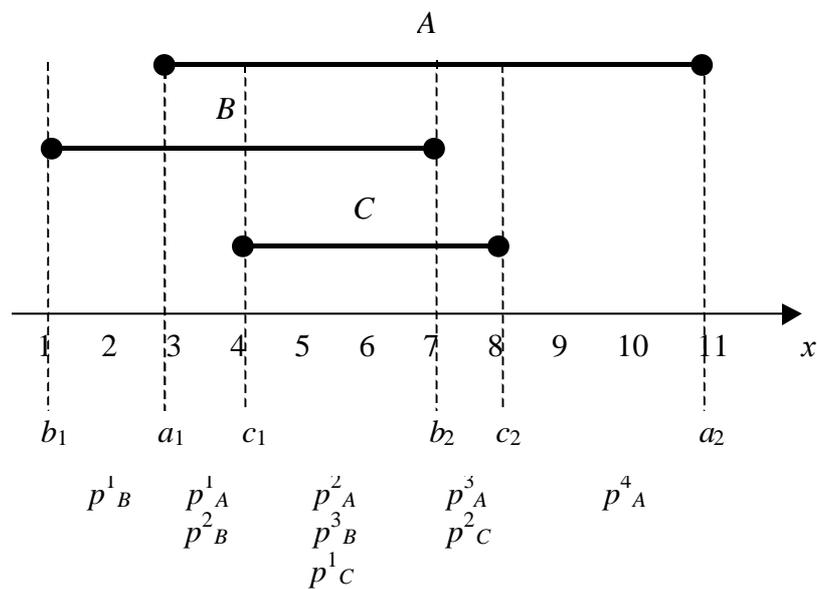


Рис. 1.14. Сравнение трех интервалов

Рассмотрим группу событий H_k : $a \in p_A^i$, $b \in p_B^j$, $c \in p_C^l$. Пусть $P(H_k)$ – вероятности событий H_k и $P(\max(A, B, C) = A / H_k)$ – условные вероятности того, что $\max(A, B, C) = A$. Тогда для полной вероятности получим:

$$P(\max(A, B, C) = A) = \sum_n^k P(H_k) P(\max(A, B, C) = A / H_k). \quad (1.69)$$

Поскольку рассматриваются только равномерные распределения случайных величин a , b и c , т.е. вероятности $P(H_k)$ могут быть легко получены из геометрических соображений путем перемножения вероятностей нахождения подинтервалов в соответствующих интервалах.

Аналогично случаю двух интервалов для рассматриваемого примера получим:

$$P(H_1) = \frac{c_1 - a_1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{a_1 - b_1}{b_2 - b_1} \cdot \frac{b_2 - c_1}{c_2 - c_1},$$

$$P(H_2) = \frac{c_1 - a_1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{a_1 - b_1}{b_2 - b_1} \cdot \frac{c_2 - b_2}{c_2 - c_1},$$

.....

$$P(H_{24}) = \frac{a_2 - c_2}{a_2 - a_1} \cdot \frac{b_2 - c_1}{b_2 - b_1} \cdot \frac{c_2 - b_2}{c_2 - c_1}.$$

Для иллюстрации будем использовать “Мягкие” интервальные отношения. Рассчитанные условные вероятности событий представлены ниже. При этом для сокращения записи выражение $\max(A, B, C) = A$ обозначено как X .

$$P(X/H_1) = 0; \quad P(X/H_2) = 0; \quad P(X/H_3) = 0; \quad P(X/H_4) = 0; \quad P(X/H_5) = 0;$$

$$P(X/H_6) = 0; \quad P(X/H_7) = \frac{1}{2}; \quad P(X/H_8) = 0; \quad P(X/H_9) = \frac{1}{2}; \quad P(X/H_{10}) = 0;$$

$$P(X/H_{11}) = \frac{1}{3}; \quad P(X/H_{12}) = 0; \quad P(X/H_{13}) = 1; \quad P(X/H_{14}) = \frac{1}{2}; \quad P(X/H_{15}) = 1;$$

$$P(X/H_{16}) = \frac{1}{2}; \quad P(X/H_{17}) = 1; \quad P(X/H_{18}) = \frac{1}{2}; \quad P(X/H_{19}) = 1; \quad P(X/H_{20}) = 1;$$

$$P(X/H_{21}) = 1; \quad P(X/H_{22}) = 1; \quad P(X/H_{23}) = 1; \quad P(X/H_{24}) = 1.$$

Поясним вывод вероятностей $P(\max(A, B, C) = A/H_3) = 1/2$ и $P(\max(A, B, C) = A/H_{11}) = 1/3$. Если имеет место событие H_3 , то a_i и c_i одновременно принадлежат подинтервалам $p_A^2 = p_B^3 = p_C^1 = [c_1, b_2]$ и b_i принадлежит подинтервалам $p_A^1 = p_B^2 = [a_1, c_1]$, которые содержат величины, меньшие, чем подинтервалы $p_A^2 = p_B^3 = p_C^1 = [c_1, b_2]$. Нетрудно заметить, что в этом случае вероятность $\max(a_i, b_i, c_i) = a_i$ равна $\frac{1}{2}$. Аналогично, если имеет место событие H_{11} , то a_i , b_i и c_i принадлежат одновременно подинтервалам $p_A^2 = p_B^3 = p_C^1 = [c_1, b_2]$. В этом случае вероятность $\max(a_i, b_i, c_i) = a_i$ равна $\frac{1}{3}$.

Подставляя полученные выражения в (1.69), после некоторых алгебраических преобразований получим:

$$\begin{aligned} P(\max(A, B, C) = A) = \\ = \frac{a_2 - c_2}{a_2 - a_1} + \frac{c_2 - b_2}{a_2 - a_1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c_2 - b_2}{c_2 - c_1} + \frac{b_2 - c_1}{c_2 - c_1} \right) + \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c_1 - b_1}{b_2 - b_1} \cdot \frac{b_2 - c_1}{c_2 - c_1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{b_2 - c_1}{b_2 - b_1} \cdot \frac{b_2 - c_1}{c_2 - c_1} \right) \end{aligned}$$

Для рассматриваемого примера имеем $P(\max(A, B, C) = A) = \frac{77}{128}$, $P(\max(A, B, C) = B) = \frac{9}{128}$ и

$$P(\max(A, B, C) = C) = \frac{42}{128}.$$

При этом выполняется соотношение:

$$P(\max(A, B, C) = A) + P(\max(A, B, C) = B) + P(\max(A, B, C) = C) = \frac{77}{128} + \frac{9}{128} + \frac{42}{128} = 1.$$

Для иллюстрации рассмотрим оценки попарного сравнения интервалов:

$$P(A > B) = \frac{5}{6}, P(A > C) = \frac{5}{8} \text{ и } P(C > B) = \frac{13}{16}.$$

Для попарных оценок выполняется условие транзитивности $C > B \wedge A > C \Rightarrow A > B$, т.е. оценки согласуются по численным значениям между собой. Поэтому можно утверждать, что парные сравнения обеспечивают удовлетворительное ранжирование интервалов, по крайней мере, на качественном уровне. Попарные оценки интервала A , как максимального, не дают количественной оценки правдоподобия (адекватности) этой оценки. Оценка только констатирует, что $P(A > C) = \frac{5}{8}$, и что C является следующим по рангу интервалом. Однако вероятности $P(A > C)$ и $P(A > B)$ не дают оценки общей вероятности доминирования интервала A в рассматриваемой группе интервалов.

Истиной оценкой глобального доминирования интервала A является характеристика:

$$P(\max(A, B, C) = A) = \frac{77}{128}.$$

Из этого следует, что вероятность глобального доминирования A ($\max(A, B, C) = A$) в рассматриваемой задаче – 60.2%. Вероятность глобального доминирования для интервала C существенно меньше – 32.8%, и для интервала B – 7%.

Отметим, что вероятность попарного доминирования интервала A – $P(A > C)$ и $P(A > B)$ больше, чем вероятность глобального доминирования – $P(\max(A, B, C) = A) = \frac{77}{128}$.

$$P(A > C) = \frac{5}{8} = \frac{80}{128} > P(\max(A, B, C) = A) = \frac{77}{128}. \text{ Последнее объясняется тем, что в}$$

интервальном случае оценка глобального доминирования является наиболее пессимистичной среди всех других возможных оценок.

Алгоритм ранжирования в случае произвольного числа сравниваемых интервалов реализуется следующим образом:

1. Проводится первичная сортировка интервалов с помощью парных сравнений и использования критерия сравнения $P(A > B) > 0.5$.
2. Исключаются из рассмотрения все интервалы, правые (верхние) границы которых меньше, чем левые (нижние) границы интервалов, являющихся их соседями в отсортированной совокупности, поскольку эти интервалы не могут претендовать на доминирование. После этой сортировки интервалов проводится отбрасывание бесперспективных интервалов, начиная с интервала, непосредственно следующего за максимальным, что позволяет значительно упростить процедуру исключения из рассмотрения заведомо не доминирующих интервалов.
3. Осуществляется сортировка границ интервалов с помощью любого алгоритма сортировки действительных чисел.
4. На основе отсортированных границ интервалов формируются подинтервалы. Если величины a, b, c, d, e, \dots являются границами интервалов, то должны быть сформированы следующие подинтервалы $[a, b], [b, c], [c, d], [d, e] \dots$. Полученные таким образом подинтервалы нумеруются.
5. Каждый интервал представляется как объединение подинтервалов. При этом необходимо указать номера подинтервалов, с которых начинаются и которыми кончаются интервалы.
6. На основе анализа всех возможных комбинаций подинтервалов в интервалах оцениваются вероятности попарного и глобального доминирования каждого интервала.

В табл. 1.2 представлены значения оценок вероятностей глобального и попарного доминирования в задаче с тремя интервалами для различных случаев их взаимного расположения.

Таблица 1.2. Сопоставление оценок ранжирования интервалов

	$P(\max(A, B, C) = A)$	$P(\max(A, B, C) = B)$	$P(\max(A, B, C) = C)$	$P(C > B)$	$P(B > A)$	$P(C > A)$
--	------------------------	------------------------	------------------------	------------	------------	------------

	0	0	1	1	1	1
	0	0	1	1	0.94	1
	0	0.056	0.94	0.94	1	1
	0	0.056	0.94	0.94	0.94	1
	0.031	0.216	0.753	0.78	0.78	0.94

Из таблицы видно, что численные оценки дают результаты, согласующиеся с геометрией расположения интервалов. Для попарных оценок выполняются условия транзитивности. Глобальные оценки дают количественную меру общего доминирования интервалов.

Рассмотрим вопросы сравнения нечетких интервалов. Для этого воспользуемся техникой разложения на α -уровни. Пусть A и B – нечеткие интервалы (числа), $A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ и $B_\alpha = \{y \mid \mu_B(y) \geq \alpha\}$ – множества α -уровней нечетких интервалов A и B , соответственно.

В соответствии с описанным выше общим подходом к реализации нечетко-

интервальной арифметики с помощью разложения нечетких чисел на α -уровни, задачу сравнения нечетких интервалов сводим к поуровневому сравнению четких интервалов, представленных на соответствующих α -уровнях. Вероятности $P_\alpha(B_\alpha > A_\alpha)$ для каждой пары A_α и B_α четких интервалов вычислим описанным выше способом.

Множество $P_\alpha(\alpha \in [0, 1])$ будем интерпретировать как нечеткое подмножество:

$$P(B > A) = \{ \alpha / P_\alpha(B > A) \}, \quad (1.70)$$

где значение α рассматривается как степень принадлежности к нечеткому интервалу $P(B > A)$.

На рис. 1.15 графически представлено нечеткое подмножество $P(B > A)$, как результат сравнения двух нечетких интервалов для одного из типичных случаев их взаимного расположения.

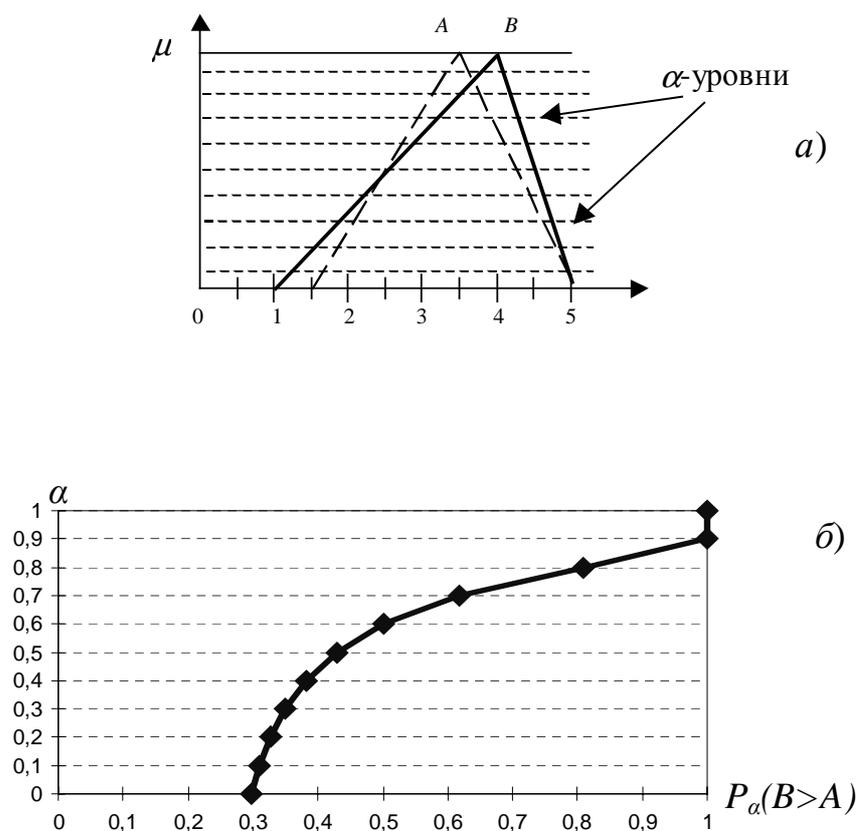


Рис. 1.15. Графическое представление нечеткого подмножества $P(B > A)$

На рис. 1.15а представлены два сравниваемых нечетких интервала с разбиением их на α -уровни. На рис. 1.15б показаны результаты вычислений $P_\alpha(B > A)$ для каждого из α -уровней в соответствии с описанной выше методикой сравнения четких интервалов. Видно, что вероятности $P_\alpha(B > A)$ монотонно возрастают при увеличении α и начиная от уровня $\alpha = 0.9$, значения $P_\alpha(B > A)$ равны единице, поскольку, как следует из рис. 1.15а, на уровнях $\alpha \geq 0.9$ четкие интервалы, соответствующие α -уровням, не пересекаются, причем, B_α строго больше, чем A_α .

Описанным способом достаточно очевидным путем строятся также и нечеткие подмножества $P(B = A)$ и $P(B < A)$.

Результирующие нечеткие подмножества могут быть использованы непосредственно. Например, пусть A, B, C – нечеткие интервалы и $P(A > B), P(A > C)$ – нечеткие подмножества, характеризующие вероятности $A > B$ и $A > C$ соответственно. Тогда вероятность $P = P(P(A > B) > P(A > C))$ – имеет смысл сравнения вероятностей и также является нечетким подмножеством. Такие нечеткие оценки являются эффективными конструктивными операциями, поскольку они опираются на использовании всей исходной нечеткой информации.

Нетрудно показать, что для всех случаев

$$P(A > B) + P(B > A) + P(A = B) = \text{«около 1»},$$

где «около 1» является симметричным относительно единицы нечетким числом.

Отсюда следует важный вывод, что в рамках развиваемого подхода основные постулаты теории вероятности в нечетком смысле сохраняются и в случае сравнения нечетких интервалов. При этом степень нечеткости нечеткого числа «около 1» является источником дополнительной информации, которая может быть использована для оценки степени неопределенности (адекватности) результатов сравнения нечетких интервалов.

Как правило, в приложениях желательным является использование действительных чисел, характеризующих в вероятностном смысле степень равенства или неравенства сравниваемых нечетких интервалов. Для этого необходимо введение одного четкого числа, характеризующего данное нечеткое подмножество. В качестве такой характеристики может выступать конструкция, получаемая в результате дефазификации:

$$\bar{P}(B > A) = \frac{\sum_{\alpha} \alpha \cdot P_{\alpha}(B_{\alpha} > A_{\alpha})}{\sum_{\alpha} \alpha} \quad (1.71)$$

Приведенное выражение реализует один из наиболее распространенных методов дефазификации. Оно основано на положении, что вклад α -уровня в полную оценку вероятности повышается с увеличением его номера.

На рис 1.16 представлены результаты сравнения нечетких интервалов для типовых случаев их взаимного расположения, выполненные на основе зависимости (1.71).

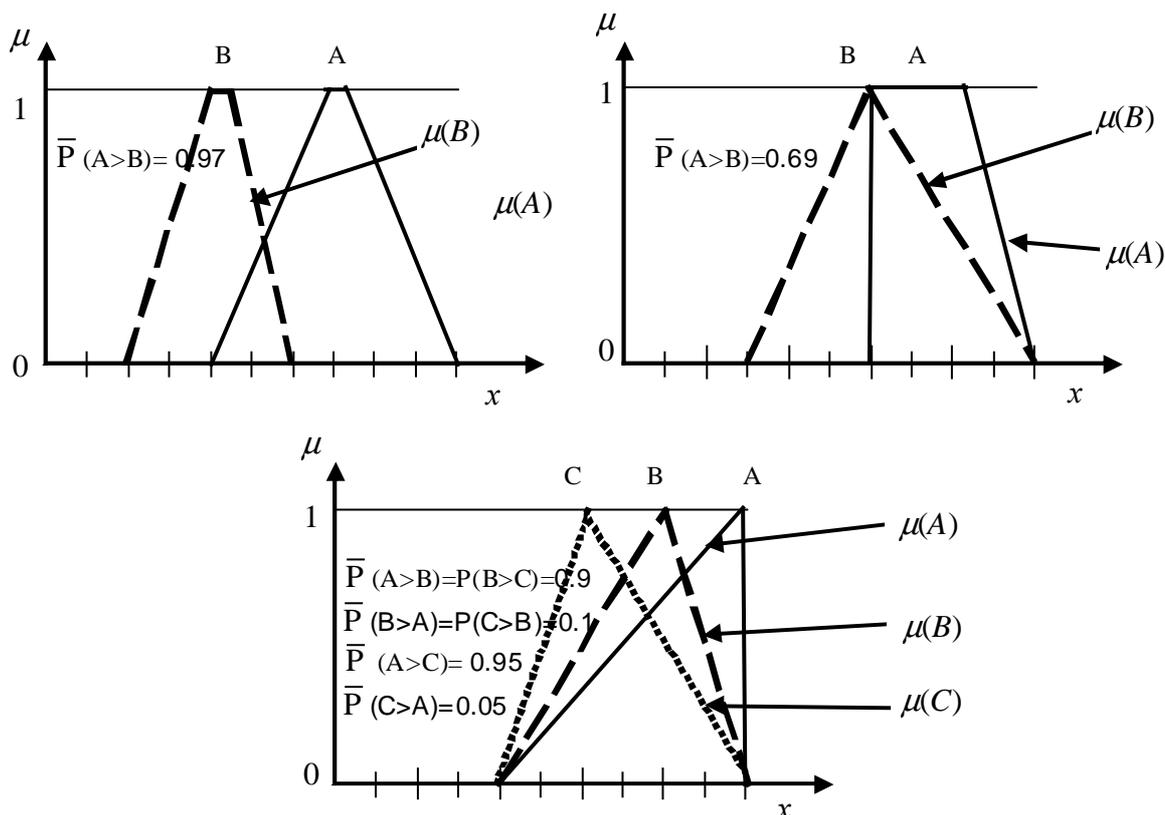


Рис. 1.16. Типичные случаи сравнения нечетких интервалов

Из рис. 1.16 видно, что количественные оценки, полученные с помощью выражения (1.71), вполне согласуются с интуитивными представлениями о вероятностном сравнении нечетких интервалов.

§ 1.6. Двухкритериальный подход к сравнению интервалов в задачах оптимизации

Решение проблем моделирования и оптимизации сложных систем всегда связано с наличием неопределенностей различного вида. При этом задачи оптимизации являются, как правило, многокритериальными. Так, наряду с требованиями увеличения каких-либо благ (дохода), или снижения затрат, всегда существует критерий, характеризующий желание

снижения неопределенности или, что то же самое, риска неполучения желаемого результата. Поэтому целесообразно формулировать задачи оптимизации в условиях неопределенности как, по крайней мере двухкритериальные, на основе частных критериев увеличения благ (снижения затрат) и минимизации риска, понимаемого как неопределенность результата. Аналогично рассмотренным выше задачам, степень неопределенности будем определять через ширину итоговых интервалов целевой функции в точке оптимума. Для определенности будем анализировать задачу минимизации.

Для решения данной проблемы рассмотрим метод двухкритериального сравнения интервалов с учетом вероятности доминирования одного интервала над другим и размеров интервалов [295]. Построим двухкритериальные оценки сравниваемых интервалов с учетом коэффициентов относительной важности частных критериев. Рассмотрим два интервала A и B .

Первый критерий сравнения интервалов, назовем его критерием вероятности, представим с помощью его функции желательности, показанной на рис. 1.17.

$$\mu_p(P(A>B)), \mu_p(P(A<B)), \mu_p(P(A=B))$$

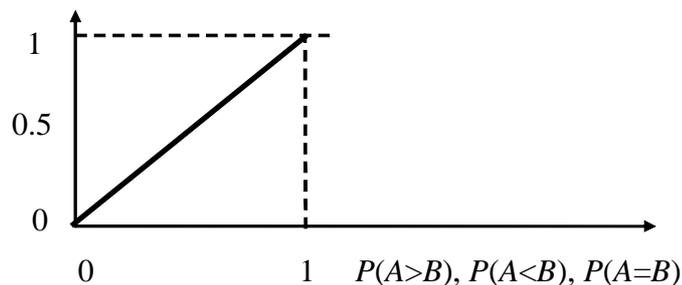


Рис. 1.17. Функция желательности критерия вероятностей

Согласно рис. 1.17, чем выше вероятность того, что $A>B$, тем большее значение принимает функция желательности $\mu_p(P(A>B))$. Аналогично рассчитываются функции желательности для вероятностей $P(A<B)$ и $P(A=B)$.

Второй критерий сравнения интервалов, назовем его критерием ширины, связанный с оценкой риска, представим через параметры, характеризующие относительные размеры сравниваемых интервалов:

$$\mu_w(x_A) = 1 - x_A, \quad \text{где} \quad x_A = \frac{W_A}{\max(W_A, W_B)},$$

$$\mu_w(x_B) = 1 - x_B, \quad \text{где} \quad x_B = \frac{W_B}{\max(W_A, W_B)}, \quad (1.72)$$

где W_A, W_B – ширина интервалов A и B соответственно.

Графическое представление функций желательности (1.72) приведено на рис. 1.18.

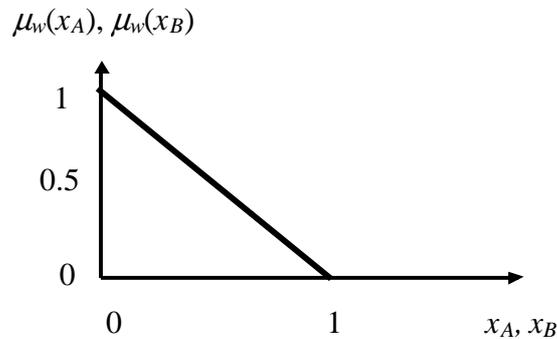


Рис. 1.18. Функция желательности относительной ширины интервалов

Из выражений (1.72) видно, что значение функции желательности критерия ширины принимает тем большее значение, чем меньше ширина оцениваемого интервала по сравнению с шириной другого интервала, с которым мы его сравниваем. Для более широкого оцениваемого интервала, например, A , значение x_A равно единице, а соответствующее значение функции желательности частного критерия равно нулю. Например, при сравнении интервалов A и B при условии, что $W_A < W_B$, из (1.72) следует $x_B = 1$, а $\mu_w(x_B) = 0$.

Для оценки возможности $A < B$ далее будем использовать пару критериев μ_p, μ_w . Рассмотрим некоторые особенности предлагаемого подхода к сравнению интервалов. Пусть на некоторой стадии решения задачи оптимизации мы имеем $\mu_p(P(A < B)) > 0.5$ и $\mu_w(x_A) = 0$. В этом случае ширина меньшего (в вероятностном смысле) интервала A больше, чем ширина большего интервала B . Понятно, что при обычном подходе к сравнению интервалов мы вынуждены будем признать, что $A < B$. Поэтому применение частного критерия $\mu_w(x_A)$ (или $\mu_w(x_B)$), сформулированного для оценки неопределенности результата оптимизации через ширину целевой функции как дополнение базового вероятностного критерия сравнения интервалов, может довольно широко использоваться в задачах оптимизации. Однако его использование не является обязательным во всех случаях. Часто целевая функция формулируется таким образом, что использование частного критерия $\mu_w(x_A)$ ($\mu_w(x_B)$) становится излишним. Например, если решается задача минимизации интервальной целевой функции линейно зависящей от параметра качества. При этом меньшие в вероятностном

смысле интервалы целевой функции автоматически становятся более узкими.

Далее проведем агрегирование частных критериев, формализуемых с помощью описанных выше функций желательности, в глобальный критерий, обобщенно характеризующий наше стремление к уменьшению интервалов в вероятностном смысле и их ширины. При этом будем использовать коэффициенты относительной важности (ранги), отражающие субъективные или объективные оценки степени значимости каждого из использованных частных критериев для достижения поставленной цели (в данном случае для решения задачи оптимизации при использовании интервальной целевой функции). Проблема агрегирования частных критериев имеет важное самостоятельное теоретическое и практическое значение и более подробно рассмотрены в главе II. Там же показано, что проблема выбора способа агрегирования контекстно зависима и не может быть до конца формализована. В нашем же случае особенности решаемой задачи позволяют сделать вывод о безусловной предпочтительности аддитивного способа агрегирования. Дело в том, что именно компенсационное свойство аддитивной свертки, т.е. компенсация в глобальном критерии малых значений одного из критериев за счет больших значений другого, полностью соответствует смыслу решаемой задачи оптимизации. В рассматриваемом случае это означает, что даже получение на некотором очередном шаге численного алгоритма оптимизации значений $\mu_w(x_A)=0$ (или $\mu_w(x_B)=0$) не будет иметь решающего значения для оценки эффективности этого шага, поскольку оценка будет фактически проводиться на основе ненулевого значения вероятностного частного критерия μ_p .

Поскольку в общем случае могут быть иметь место все три интервальные события $A < B$, $A = B$ и $A > B$, сформулируем следующие интегральные критерии для оценки величины интервалов:

$$D_{A < B}(A, B) = \frac{1}{2} \cdot (r_p \mu_p(P(A < B)) + r_w \mu_w(x_A)) \quad (1.73)$$

$$D_{A > B}(A, B) = \frac{1}{2} \cdot (r_p \mu_p(P(A > B)) + r_w \mu_w(x_B)) \quad (1.74)$$

$$D_{A = B}(A, B) = \max(D'_{A = B}(A, B), D''_{A = B}(A, B)) \quad (1.75)$$

где
$$D'_{A=B}(A, B) = \frac{1}{2} \cdot (r_p \mu_p(P(A = B)) + r_w \mu_w(x_A))$$

$$D''_{A=B}(A, B) = \frac{1}{2} \cdot (r_p \mu_p(P(A = B)) + r_w \mu_w(x_B))$$

Глобальные критерии (1.73) и (1.74) используются в ситуациях, при которых реализуются условия $A < B$ или $A > B$ соответственно. Глобальный критерий (1.75), применяемый при условии $A = B$, т.е. когда вероятность равенства интервалов превышает вероятности их неравенства, складывается из двух глобальных подкритериев $D'_{A=B}(A, B)$ и $D''_{A=B}(A, B)$ и равен значению большего из них. Глобальные подкритерии $D'_{A=B}(A, B)$ и $D''_{A=B}(A, B)$ сконструированы по тому самому принципу, что и критерии (1.73), (1.74), т.е. складываются из двух локальных критериев.

В (1.73)-(1.75) r_p, r_w – ранги (коэффициенты относительной значимости) критериев вероятности и ширины, соответственно.

При наличии только двух частных критериев, задача определения их рангов r_p, r_w вызывает трудности. Однако при этом должно быть выполнено обычное ограничение $(r_p + r_w)/2 = 1$. При соблюдении данного условия для любого случая двухкритериального сравнения интервалов будет выполняться неравенство:

$$0 \leq D_{A < B}, D_{B < A}, D_{B=A} \leq 1.$$

После получения в процессе численной оптимизации текущего значения целевой функции (интервала B), проводится сравнение его с оптимальным, найденным на предыдущих шагах, значением интервала A с помощью глобальных критериев $D_{A < B}, D_{B < A}$. Например, если $D_{A < B} < D_{B < A}$, то $B < A$, иначе $A < B$.

Применение такого метода сравнения интервалов с учетом вероятности превосходства одного интервала над другим и относительной ширины в процессе оптимизации для сравнения текущего значения целевой функции с оптимальным, найденным на предыдущих шагах, позволяет достичь снижения неопределенности результата.

Подчеркнем, что предложенный подход включает обобщенную двухкритериальную оценку равенства интервалов, что особенно важно для решения задач интервальной оптимизации при наличии ограничений типа равенств.

Продemonстрируем эффективность разработанной методики на следующей модельной задаче оптимизации. Функция цели имеет вид интервальной многоэкстремальной разрывной функции:

$$F(x) = [f_1, f_2] = \begin{cases} \left[\frac{[4.05, 4.95]}{x} - 0.5x - 0.04, \right. & x < 0, \\ \left. -\frac{[4.275, 4.725]}{x} + 0.5x, \right. & x > 0, \end{cases} \quad (1.76)$$

которая графически представлена на рис. 1.19.

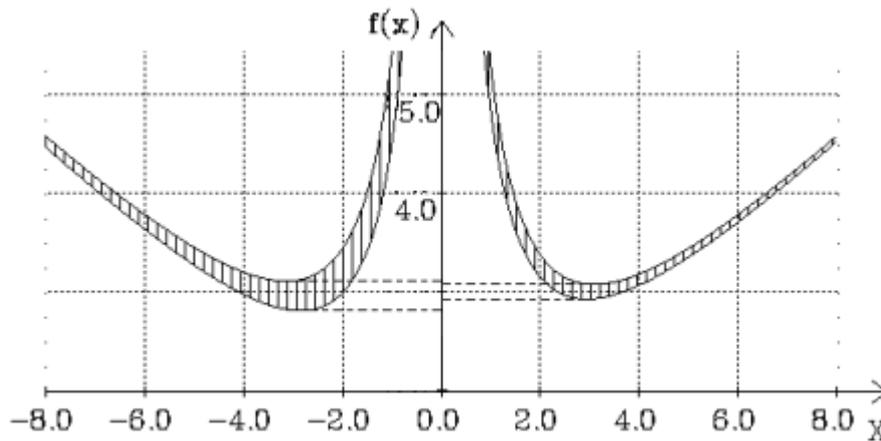


Рис. 1.19. График функции $F(x)$

Требуется найти оптимальную величину x при предъявлении двух независимых требований: минимизировать значение функции цели $F(x)$ и снизить неопределенность конечного результата (минимизировать ширину интервала целевой функции). Результаты решения задачи с помощью описанной методики графически представлены на рис. 1.19. Из рисунка видно, что интервальная целевая функция $F(x)$ имеет два локальных минимума в точках $x = 3$ и $x = -3$. Среднеинтервальное значение целевой функции в точке локального оптимума $x = -3$ меньше, чем в локальном оптимуме $x = 3$. Однако, ширина (неопределенность) целевой функции в точке отрицательного экстремума в два раза больше, чем в точке $x = 3$ (см. табл. 1.3).

Таким образом, имеется типичная ситуация, когда необходимо выбрать точку глобального оптимума в условиях антагонистичности частных критериев: минимизации

целевой функции и уменьшения неопределенности результата, выраженной через ширину интервала целевой функции в точке оптимума.

В данной ситуации не могут быть использованы градиентные методы оптимизации из-за разрывности целевой функции. Поэтому для решения поставленной задачи применялся метод случайного поиска «прямая выборочная процедура с уменьшением интервала поиска» [258], который модифицировался применительно к интервальным (нечетко-интервальным) данным с использованием интервальной (нечетко-интервальной) методологии сравнения интервалов. В качестве критериев для оценки величины интервалов будем использовать интегральные критерии $D_{A<B}$, $D_{B<A}$, объединяющие конфликтующие частные критерии.

Таблица 1.3. Локальные экстремумы интервальной функции $F(x)$

Точка локального оптимума	-3	3
Минимум функции $F(x)$	[2.81, 3.11]	[2.93, 3.08]
Среднеинтервальное значение целевой функции	2.96	3.005
Ширина интервала	0.3	0.15

Таким образом, минимизация $F(x)$ сводилась к процедуре максимизации одного из интегральных критериев $D_{A<B}$, $D_{B<A}$, $D_{B=A}$, рассчитываемых по формулам (1.73)- (1.75). Фактически на каждом шаге численного решения проводилось сравнение значений $D_{A<B}$, $D_{B<A}$, $D_{B=A}$, по результатам которого оценивалась эффективность этого шага.

Результаты глобальной минимизации интервальной тестовой функции $F(x)$ для различных значений рангов частных критериев вероятности r_p и ширины r_w представлены в табл. 1.4. Тестирование показало (см. табл. 1.4), что при увеличении значимости критерия ширины интервала происходит сдвиг точки оптимума в сторону увеличения целевой функции и, одновременно, уменьшается ширина интервала в точке оптимума. Зависимость значения целевой функции от рангов вероятности и ширины представлена на рис. 1.18, на котором оптимальный интервал представлен верхней и нижней границами и его средним значением.

Из табл. 1.4 и рис. 1.20 видно, что при переходе от ранга ширины $r_w = 0.7$ к $r_w = 0.75$ происходит скачок из области отрицательных значений аргумента в область положительных. В связи с этим, глобальным оптимумом вместо первого локального экстремума, расположенного в области отрицательных значений (точка $x = -3.08$), становится второй

локальный экстремум, находящийся в области положительных значений оси абсцисс (точка $x = 3.045$) и имеющий ширину интервала почти в два раза меньше. Очевидно, что это является следствием нашего предпочтения, выраженного рангами r_p , r_w используемых частных критериев.

Проанализируем более подробно переход оптимума из области отрицательных значений аргумента в область положительных. Из представленных в таблице 1.4 данных следует, что при увеличении ранга ширины происходит сдвиг оптимума в сторону с интервалами меньшей ширины. Однако уменьшение ширины оптимального интервала достигается за счет некоторого ухудшения (увеличения) среднего значения интервала. При этом при приближении ранга ширины к значению 2 происходит резкое увеличение среднеинтервального значения целевой функции при стремлении ширины интервала к нулю (см. рис. 1.20).

Таблица 1.4. Результаты глобальной минимизации функции $F(x)$

Показатель	$r_p=2$ $r_w=0$	$r_p=1.3$ $r_w=0.7$	$r_p=1.25$ $r_w=0.75$	$r_p=0.4$ $r_w=1.6$
Минимум функции $F(x)$	[2.81, 3.11]	[2.815, 3.107]	[2.926, 3.074]	[2.94, 3.08]
Среднеинтервальное значение целевой функции	2.96	2.961	3.000	3.01
Ширина интервала	0.3	0.29	0.15	0.14
Точка глобального минимума	-3	-3.080	3.045	3.29

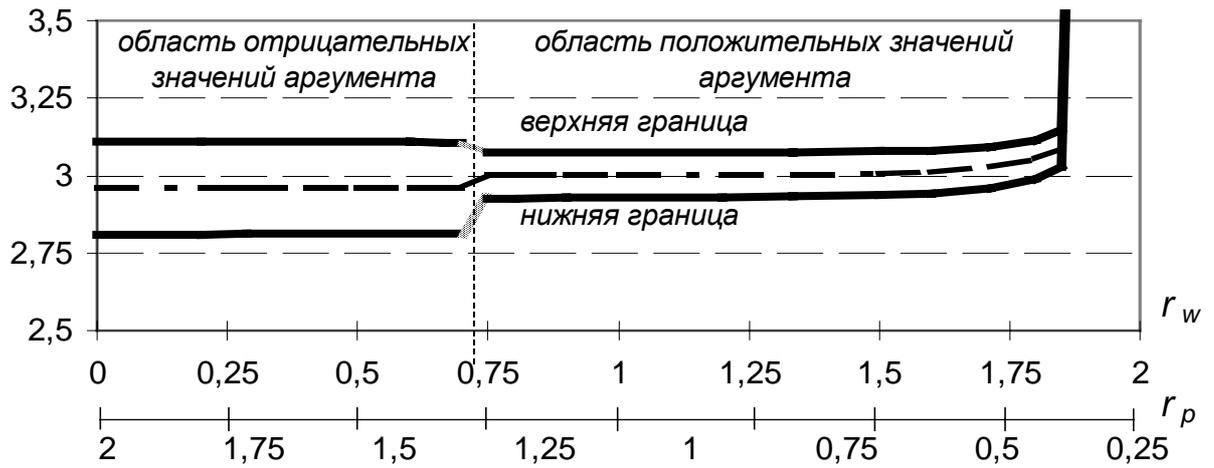


Рис. 1.20. Зависимость значения интервальной целевой функции $F(x)$ от рангов вероятности и ширины

Таким образом, в процессе варьирования рангами частных критериев вероятности и ширины интервала можно достигнуть требуемого компромисса между шириной выходного интервала и его средним значением, что вполне согласуется с нашими интуитивными представлениями.

Г Л А В А II

ПРОБЛЕМЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ В СВЕТЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Во введении и главе I сформулированы основные методологические проблемы, возникающие при решении многокритериальных задач, связанные с многоуровневостью системы частных критериев, их неравноценностью, необходимостью одновременного учета как количественно, так и качественно заданных показателей качества. В конкретных приложениях в технике, управлении, экономике или экологии указанные проблемы могут обладать самыми различными специфическими особенностями, в связи с чем построение единой «универсальной» методики, позволяющей без адаптации решать многокритериальные задачи в различных отраслях, представляется нецелесообразным как с методической, так и практической точек зрения. Даже в случае, если такая всеобъемлющая методика была бы когда-либо построена, ее программная реализация оказалась бы настолько громоздкой и неудобной для пользователя, что это ставило бы под сомнение возможность ее использования на практике.

В то же время анализ важнейших проблем постановки и решения многокритериальных задач, а также накопленный опыт решения этих задач в различных отраслях, позволили сделать вывод о целесообразности и методической обоснованности разработки некоторой «базовой» методики и реализующего ее программного обеспечения, позволяющих после определенной адаптации строить методики решения конкретных задач многокритериальной оценки и оптимизации, учитывающие специфику области использования. Такая «базовая» методика должна обеспечивать разрешение ключевых проблем, присущих всем многокритериальным задачам, независимо от конкретных приложений.

Разработка «базовой» методики требует комплексного решения сформулированных проблем, в первую очередь, адекватного учета неопределенностей нестатистического характера. Последнее, в свою очередь, ставит на повестку дня необходимость дальнейшего развития математического аппарата теории нечетких множеств исходя из практических потребностей, возникающих в ходе постановки и решений многокритериальных задач оценки качества и оптимизации.

§ 2.1. Математическая формализация частных критериев с помощью функций принадлежности (желательности)

2.1.1. Частные критерии на основе показателей качества, представленных числами

Базовой проблемой математической формализации неопределенных параметров сложных систем и частных критериев является представление различных неопределенных характеристик в единой универсальной форме. На практике при формальном описании реальных неопределенностей наиболее часто используются три основных способа представления. Неопределенные характеристики могут быть заданы нечеткими интервалами, четкими интервалами или распределениями вероятностей.

Наибольшая неопределенность и, соответственно, наименьший объем полезной информации имеют место при описании неизвестных параметров систем или критериев качества четкими интервалами. Этот способ формализации соответствует ситуациям, когда достаточно точно известны лишь границы допустимых значений анализируемого параметра, и отсутствует какая-либо количественная или качественная информация о возможностях (вероятностях) реализации различных его значений внутри заданного интервала. В этом случае математическое описание неопределенных величин осуществляется с помощью стандартных характеристических функций (рис. 2.1), которые для общности можно рассматривать как функции принадлежности соответствующим четким интервалам.

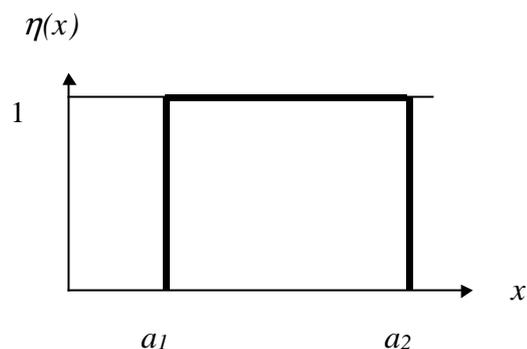


Рис. 2.1. Характеристическая функция принадлежности четкому интервалу $[a_1, a_2]$:

$$\eta(x) = 1, x \in [a_1, a_2]; \eta(x) = 0, x \notin [a_1, a_2]$$

При наличии дополнительной качественной информации о значениях параметра внутри интервала, когда, например, на вербальном уровне известно, что значение a в

некотором смысле более предпочтительно, чем b , без количественной оценки этого отношения, математическая формализация неопределенностей может быть адекватно реализована с помощью нечетких интервалов трапецеидального вида [339] (рис. 2.2).

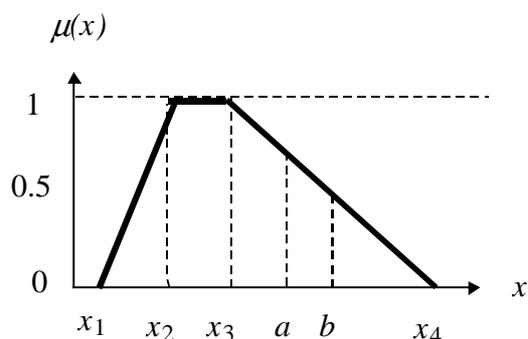


Рис. 2.2. Нечеткий интервал: $\mu(x)$ - функция принадлежности нечеткому интервалу ($\mu(a) > \mu(b)$; a предпочтительнее, чем b)

В тех случаях, когда отношения между возможностями реализации различных значений параметра можно охарактеризовать конкретными числами, нечеткие интервалы вырождаются в вероятностные распределения [339] (рис. 2.3).

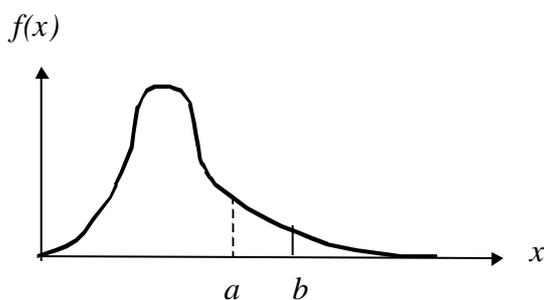


Рис. 2.3. Частотное распределение: $f(X)$ - функция плотности вероятности ($f(a)/f(b) = d$ - известное значение)

Поскольку при моделировании реальных систем, как правило, приходится одновременно использовать все три базовые способы формализации – интервальный, нечетко-интервальный и вероятностный, возникает проблема приведения различных описаний неопределенностей к единой форме представления. Приведение нечетко-интервальной неопределенности к форме частотных распределений невозможно, так как для этого отсутствует необходимая количественная информация. Кроме этого, отсутствие описаний арифметических операций для параметров, заданных частотными

распределениями, затрудняет построение практически полезной арифметики для непосредственного оперирования с такого рода неопределенными данными. Фактически теоретико-вероятностная методология позволяет производить операции только с некоторыми характеристиками частотных распределений (математическое ожидание, дисперсия и т.д.), а не с исходными распределениями плотности вероятности, как множествами.

Сведение частотного распределения к некоторому набору численных характеристик, таких как среднее арифметическое, медиана, мода и т.д., ведет к значительной потере исходной информации, а в некоторых случаях к искажению качественной картины исследуемых явлений. Например, математическое ожидание в случае несимметричных распределений вероятностей нельзя рассматривать как семантически верный термин, поскольку оно не является наиболее вероятным значением случайной величины. В таких ситуациях возникают аналогичные трудности с интерпретацией среднеквадратических отклонений и пр. Выходом из описанной ситуации было бы построение арифметики, позволяющей непосредственно оперировать с частотными распределениями, как с множествами. Однако, в силу разных причин, несмотря на неоднократные попытки различных авторов, построить такую арифметику не удалось. В мировой литературе отсутствуют сведения о существовании конструктивной методики оперирования непосредственно с частотными распределениями.

Поэтому в данной работе в качестве основного универсального способа представления неопределенностей принят нечетко-интервальный подход. Два других способа представления неопределенностей сводятся к базовому варианту описания. Очевидно, что четко-интервальное описание является частным случаем базового способа. Функции распределения вероятностей $f(x)$ должны трансформироваться в трапецеидальные нечетко-интервальные функции принадлежности $\mu(x)$ путем кусочно-линейной аппроксимации $f(x)$.

Ясно, что при этом неизбежна потеря части исходной информации. Однако определенное снижение информативности описания неопределенностей компенсируется существенным расширением конструктивных возможностей теории нечетких множеств, в частности, построением сравнительно простой арифметики, оперирующей с нечеткими интервалами. При этом использование достаточного числа рассмотренных ранее α -уровней нечетко-интервальных функций принадлежности позволяет при переводе частотных распределений в нечетко-интервальные числа сохранить основную часть информации, представленной в распределении $f(x)$.

На рис. 2.4 графически проиллюстрирована процедура трансформации $f(x)$ в $\mu(x)$, сохраняющая качественную и количественную информацию о размерах и расположениях доверительных интервалов распределения вероятности на α -уровнях нечетко-интервальных чисел. Очевидно, что чем гуще сетка α -уровней, тем точнее результат трансформации.

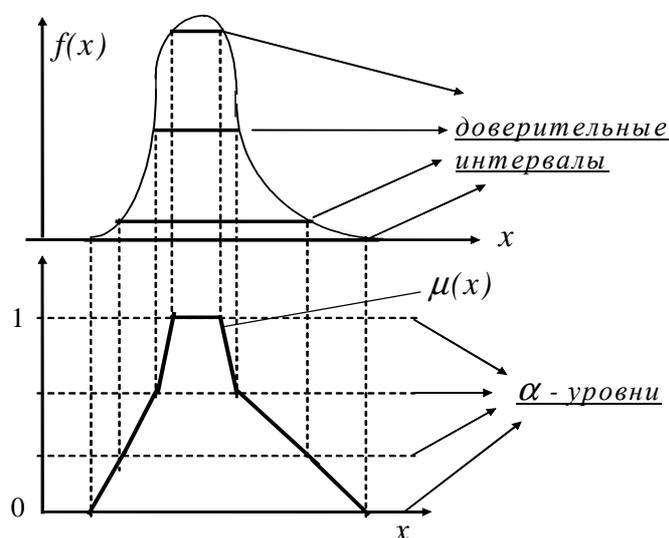


Рис. 2.4. Схема трансформации $f(x)$ в $\mu(x)$

Такой способ трансформации $f(x)$ соответствует рассмотренной в главе I методологии построения нечетко-интервальной математики, сводящейся к разложению нечетких интервалов на составляющие α -уровни и дальнейшему оперированию с ними в рамках интервальной математики.

Как показывает опыт, в большинстве практических приложений нечетко-интервального моделирования оказывается достаточным иметь информацию только о двух интервалах, соответствующих α -уровням: основании интервала ($\mu(x) = 0$) и интервале наиболее возможных значений ($\mu(x) = 1$). Поэтому в базовом варианте далее будем аппроксимировать получаемые нечеткие интервалы трапецидальными функциями принадлежности (рис. 2.2).

Такая функция достаточно просто и однозначно описывается четырьмя реперными точками $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Четырехреперное представление, с одной стороны, значительно уменьшает количество вычислений при выполнении арифметических операций, с другой стороны, снижает неопределенность итоговых результатов. Последняя является следствием самой природы интервальной и нечетко-интервальной арифметик, характеризующихся неизбежным ростом ширины результирующих интервалов с увеличением числа

промежуточных арифметических операций с интервальными и нечетко-интервальными числами.

При таком подходе возникает необходимость приведения нечетко-интервального числа к четырехреперному виду. Эту задачу можно решить любым стандартным методом аппроксимации. В конкретных задачах будем применять метод наименьших квадратов и аппроксимировать боковые грани нечетко-интервальных чисел прямыми с максимальной степенью приближения к исходным значениям. При этом оптимальная аппроксимация будет соответствовать минимальной сумме квадратов разностей длин α -уровней исходного и аппроксимированного нечетко-интервального числа. В программной реализации такого подхода будем использовать метод покоординатного спуска. При определенной длине нижнего α -уровня с небольшим шагом будем изменять верхний α -уровень до получения наименьшей суммы квадратов разностей длин α -уровней, затем фиксировать длину верхнего α -уровня и изменять нижний α -уровень и т.д. Процесс поиска решения закончим в том случае, когда любое изменение длин верхнего или нижнего α -уровней будет приводить к увеличению суммы квадратов.

В случае сложных функций распределения $f(x)$ рассмотренный способ трансформации $f(x)$ в $\mu(x)$ может вызывать определенные технические проблемы, для решения которых целесообразно переходить к интегрированному распределению вероятностей

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \text{ сглаживающим характеристики неопределенностей.}$$

Приведем также еще одну методику трансформации частотных распределений в нечеткие интервалы, которая позволяет сохранить информацию о длинах доверительных интервалов. Методика обладает рядом достоинств, к которым можно отнести простоту реализации и получение хороших результатов при сложных законах распределения случайных величин.

В рамках этого подхода трансформация частотного распределения в нечетко-интервальную форму проводится с использованием доверительных интервалов в следующей последовательности:

- на основе исходных частотных распределений строится кумулятивная кривая, общий вид которой представлен на рис. 2.5.;

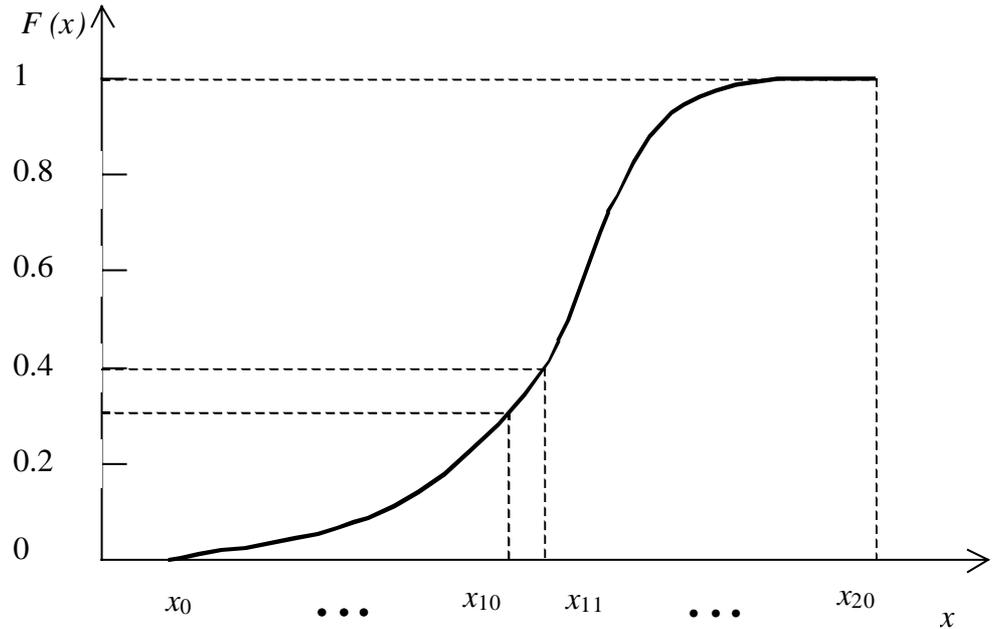


Рис. 2.5. Общий вид кумулятивной кривой, построенной на основе исходных частотных распределений.

Значение функции $F(x)$, характеризующей кумулятивную кривую для некоторого фиксированного x , находится как интеграл $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$, при этом не имеет значения способ задания частотного распределения случайной величины. При реализации данной методики в виде программного обеспечения для нахождения значений интегралов использовался метод трапеций.

- с помощью полученной зависимости находятся значения переменной (в нашем случае x), соответствующие значениям кумулятивной функции 0, 0.1, 0.2, ... 0.9, 1 и обозначаются через x_0, x_1, \dots, x_{20} соответственно;

- на основании полученных значений строятся отрезки, соответствующие разным доверительным вероятностям: $[x_{10}, x_{10}]$ – соответствует доверительной вероятности 0, $[x_0, x_{11}]$ - доверительной вероятности 10, $[x_8, x_{12}]$ - доверительной вероятности 20, ..., $[x_0, x_{20}]$ - доверительной вероятности 100;

- дальнейшие операции по получению нечетко-интервального числа выполняются путем прямой трансформации кумулятивных функций в нечеткие интервалы.

Рассмотренные выше способы формирования $\mu(x)$ опирались на использование имеющейся статистической информации. В реальных ситуациях такая часто информация отсутствует и функции принадлежности частных критериев формируются на основе

непосредственного опроса экспертов. На основе опыта, и интуиции эксперты часто могут достаточно уверенно количественно охарактеризовать границы (интервалы) допустимых значений параметров и области их наиболее предпочтительных значений. Эти суждения экспертов фактически определяют четыре реперные точки, на базе которых формируются трапецеидальные функции принадлежности. В зависимости от значений координат реперных точек кусочно-линейные функции принадлежности $\mu(x)$ могут принимать различную форму (рис. 2.6).

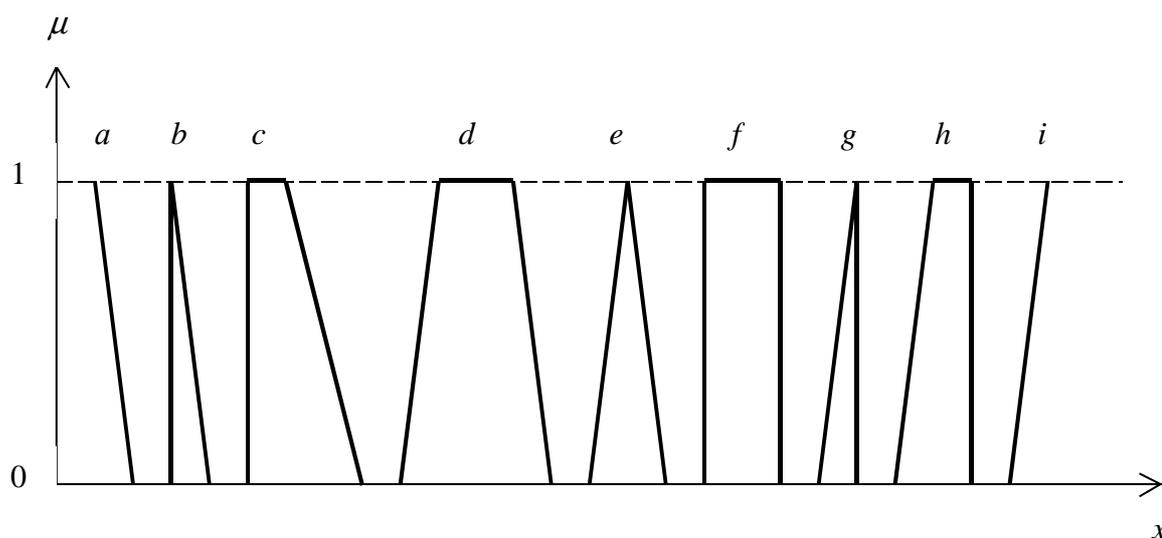


Рис. 2.6. Формы наиболее часто используемых кусочно-линейных функций принадлежности: *a* – левая внешняя функция принадлежности; *b*, *g* – треугольные несимметричные функции принадлежности; *c* - трапецеидальная несимметричная функция принадлежности; *d* - трапецеидальная симметричная функция принадлежности; *e* - треугольная симметричная функция принадлежности; *f* - прямоугольная функция принадлежности; *h*- трапецеидальная несимметричная функция принадлежности; *i* – правая внешняя функция принадлежности.

Если эксперты представляют частные критерии на лингвистическом (вербальном) уровне описания, то формирование нечетких интервалов, описывающих частные критерии, целесообразно проводить с использованием понятия «степень выраженности положительного эффекта, определяемого параметром с его ростом». На их основе можно построить функцию желательности, характеризующую степень выраженности вербально задаваемого параметра с использованием лингвистических градаций степени выраженности и соответствующих им числовых оценок из интервала $[0,1]$ (рис.2.7).

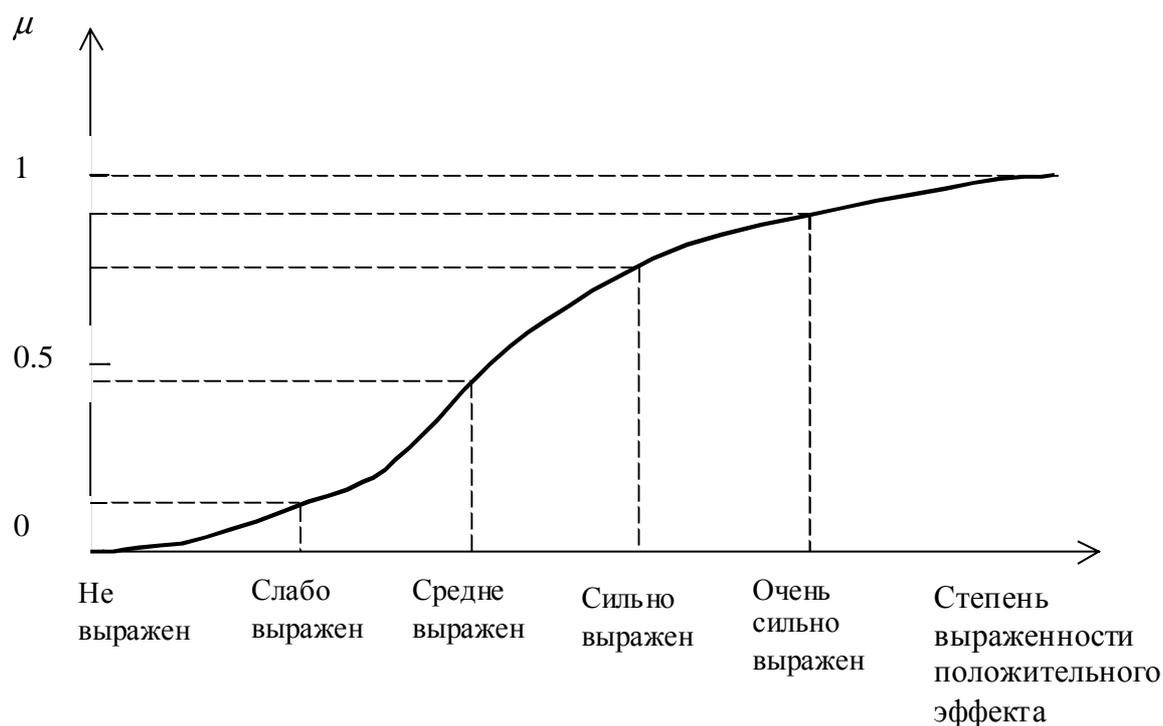


Рис. 2.7. Нечеткий интервал, соответствующий частному критерию, заданному на качественном (лингвистическом) уровне

Рассмотренные подходы позволяют в значительной мере унифицировать процесс математической формализации частных критериев качества в условиях неопределенности первого уровня нечеткости.

2.1.2. Частные критерии в форме функций принадлежности при наличии интервальных и нечетко-интервальных аргументов

Во многих важных для практики случаях для описания неопределенностей появляется необходимость использования более сложных, чем рассмотренные выше, математических конструкций. Например, может быть нечетким интервалом аргумент функции желательности или значения функции желательности определяются не точечными численными оценками, а нечеткими множествами 1-го типа нечеткости, и т. д.

Рассмотрим ситуацию, когда частный критерий эффективности описывается некоторой функцией желательности $\mu(x)$ (рис. 2.8). Обычно качестве аргумента x используются обычные четкие числа, однако во многих случаях это является довольно грубым приближением. Положим, что x является нечетко определенной характеристикой

системы. Представим x некоторым размытым интервалом $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, которому соответствует функция принадлежности $\eta(x)$ (рис. 2.8). В итоге возникает проблема математической интерпретации конструкции $\mu(\eta(x))$, определяющей функцию принадлежности, зависящую от нечетко-интервального аргумента.

В качестве содержательного примера такого рода может быть взята задача описания будущего дохода от реализации инвестиционного проекта. Пусть x - прогнозируемый чистый приведенный доход инвестиционного проекта, и $\mu(x)$ (рис.2.8) – функция желательности, описывающая критерий, отражающий требование максимизации дохода. Из содержательного смысла задачи ясно, что величина будущего прогнозируемого дохода x является в значительной степени неопределенной величиной. Неопределенность будущего дохода носит явно выраженный нестатистический характер, поскольку прогнозирование опирается на множество заранее неизвестных факторов, таких как будущие цены, уровень инфляции, конъюнктурная обстановка и т.д. Наличие таких неопределенностей является основанием для описания будущего дохода проекта некоторым нечетким интервалом с функцией принадлежности $\eta(x)$ (рис. 2.8).

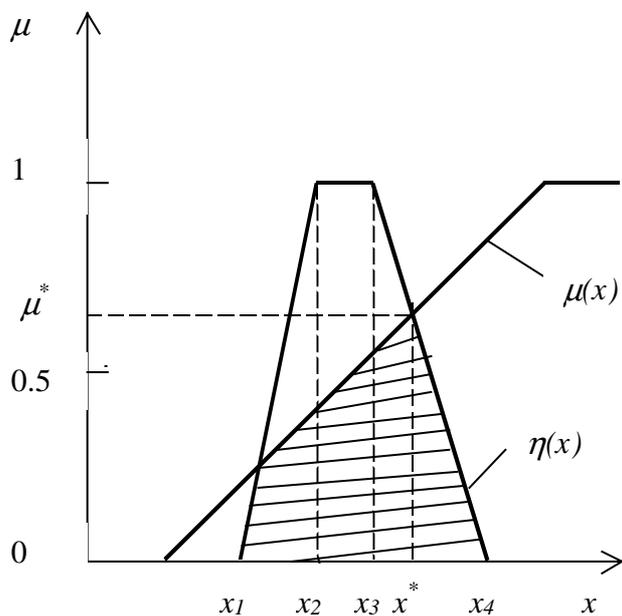


Рис. 2.8. Функция желательности $\mu(x)$ и функция принадлежности $\eta(x)$ нечеткого показателя качества x

Рассмотрим возможные подходы к определению конструкции $\mu(\eta(x))$ или, что то же самое, $\mu(X)$, где X - нечеткий интервал. Положим для определенности, что $\mu(X)$ монотонно

возрастает во всем диапазоне значений от нуля до единицы (рис. 2.8). Тогда функцию $\mu(x)$ будем интерпретировать как математическое описание критерия желательности постоянного роста x . Конструкцию $\eta(x)$ будем рассматривать как функцию, описывающую некоторый критерий, характеризующий степень достижимости, возможности реализации тех или иных значений x на интервале $[x_1, x_4]$.

Тогда проблему определения операции $\mu(\eta(x))$ можно сформулировать как некоторую двухкритериальную задачу оптимизации. Для случая равнозначных частных критериев, четким решением задачи максимизации $\mu(x)$ и $\eta(x)$, очевидно, будут значения аргумента x^* и целевой функции (рис. 2.8). Величины x^* и μ^* следует рассматривать как первый, приближенный результат вычисления операции $\mu(X)$ в случае, если X - нечеткий интервал. Значения x^* и μ^* легко рассчитываются и их применение удобно на практике.

В общем случае в соответствии с базовыми положениями нечетко-интервальной математики, если X - нечеткий интервал, то $\mu(X)$ является нечетко-интервальным расширением функции $\mu(x)$ и также представляет собой нечеткий интервал. Очевидно, что замена нечеткого интервала $\mu(X)$ каким-то одним, пусть даже «оптимальным», четким значением μ^* приводит к потере информации. Поэтому представим конструктивную методику расчета зависимости $\mu(X)$ для общего случая.

Построение нечеткого интервала $\mu(X)$ осуществляется путем отображения нечеткого подмножества, описываемого функцией принадлежности $\eta(x)$ на нечеткое подмножество с функцией принадлежности $\mu(x)$. Графическая иллюстрация схемы такого отображения представлена на рис. 2.9. Результатом является нечеткий интервал $\bar{\mu}(\mu)$.

Опишем этапы этого отображения более строго.

Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ - нечеткий интервал, являющийся нечетким расширением аргумента функции $\mu(x)$. Осуществим нечетко-интервальное расширение аргумента $x \rightarrow X$ функции желательности μ . Это влечет за собой нечетко-интервальное расширение значений $\mu(x) \rightarrow \mu(X)$.

Нечеткое множество, описываемое функцией $\mu(X)$, представим совокупностью α -уровней. Этому соответствует представление $\mu(X)$ в форме

$$\mu(X) \cong \bigcup_{\alpha} \mu_{\alpha} \quad (\alpha = 0, \dots, n), \quad (2.1)$$

где μ_{α} являются четкими интервалами, соответствующими α -уровням нечеткого подмножества, описываемого функцией принадлежности $\mu(X)$:

$$\mu_\alpha(X_\alpha) = [\min\{\mu(\underline{X}_\alpha), \mu(\overline{X}_\alpha)\}, \max\{\mu(\underline{X}_\alpha), \mu(\overline{X}_\alpha)\}] \quad X_\alpha = [\underline{X}_\alpha, \overline{X}_\alpha] \quad (2.2)$$

X_α – интервалы, соответствующие α -уровням нечеткого подмножества, описываемого функцией принадлежности $\eta(x)$, $\underline{X}_\alpha, \overline{X}_\alpha$ – соответственно нижняя и верхняя границы интервала X_α .

Для иллюстрации рассмотрим ситуацию, представленную на рис. 2.9. Исходную четкую функцию $\mu(x)$ на участке возрастания можно описать линейной зависимостью $\mu(x) = ax - b$.

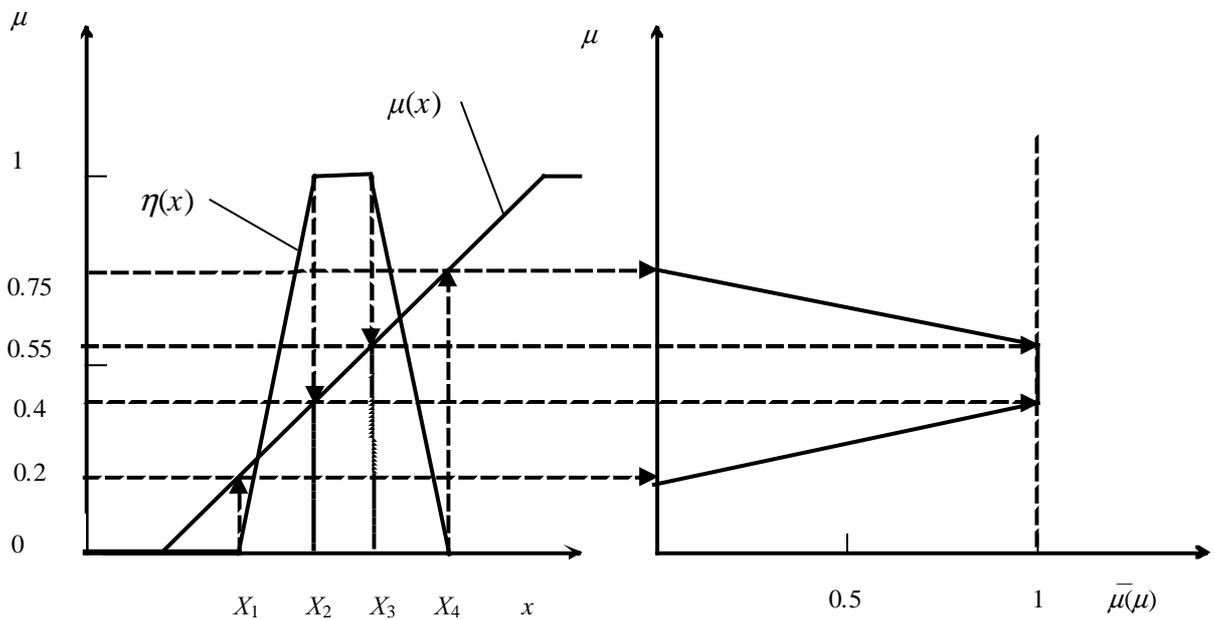


Рис. 2.9. Нечетко-интервальное расширение функции $\mu(x)$

Тогда, выполняя операции (2.2) для нижнего и верхнего α -уровней получим, соответственно (рис. 2.9):

$$\mu_0 = a[X_1, X_4] - b; \quad \mu_0 = [0.2, 0.75];$$

$$\mu_n = a[X_2, X_3] - b; \quad \mu_n = [0.4, 0.55].$$

Рассмотренный конкретный пример позволяет лучше понять представленный ниже алгоритм построения отображения $\mu(X)$ для общего случая. Рассмотрим исходные нечеткие подмножества

$$IX = \{(x, \mu_{IX}(x)), x \in X_{IX}\},$$

где X_{IX} - область определения нечеткого подмножества IX ; $\mu_{IX}(x)$ - его функция принадлежности. Введем нечеткие подмножества

$$IK = \{(x, \mu_{IK}(x)), x \in X_{IK}\},$$

где X_{IK} - область определения нечеткого подмножества IK ; $\mu_{IK}(x)$ - его функция принадлежности.

Тогда нечетко-интервальное расширение IK можно представить в виде:

$$IK(IX) = \{(K = \mu_{IK}(x), \mu_K(K) = \mu_{IX}(x)), x \in X_{IX}\}.$$

Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, видим, что в этой частной задаче $\mu_K(K)$ есть не что иное, как $\mu(X)$, где X - нечеткое число, т.е. имеет место соответствие $IX \rightarrow X$,

$IK \rightarrow \mu_K(X)$. Графическая иллюстрация конструкции нечетко-интервального расширения приведена на рис. 2.10.

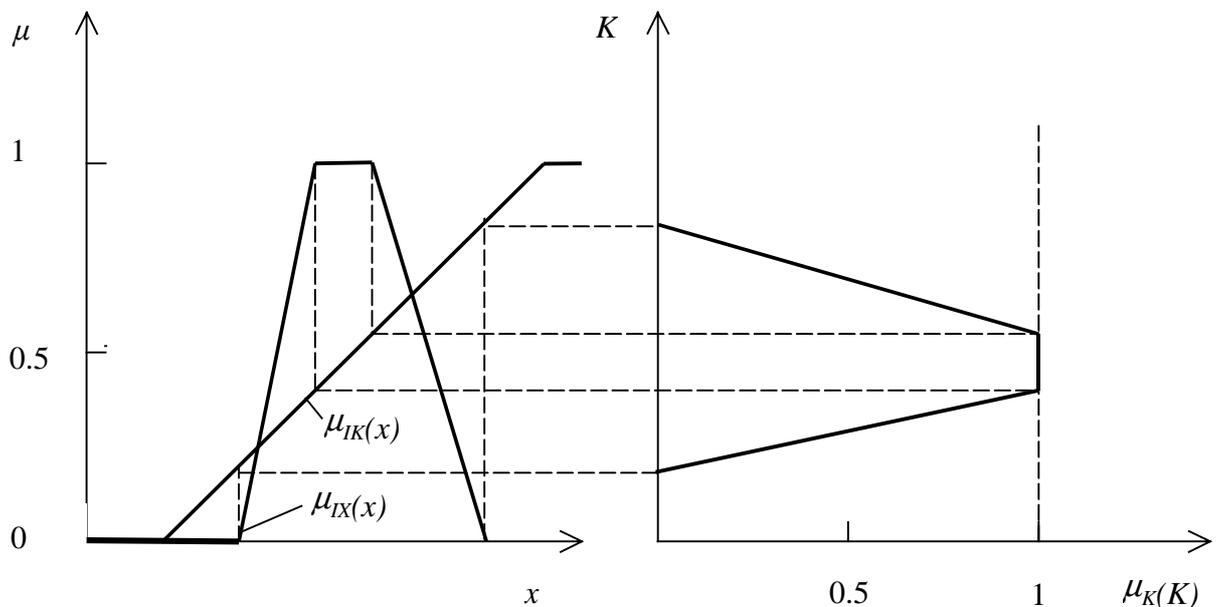


Рис. 2.10. Общий случай нечетко-интервального расширения

Из последнего результата следует, что разработанная методика нечетко-интервального расширения работоспособна не только в случаях, представленных на рис. 2.9, рис. 2.10, но также для любых форм используемых исходных функций принадлежности (желательности).

2.1.3. Гипернечеткие частные критерии

Рассмотрим задачу построения функции желательности некоторого критерия качества на основе опроса экспертов. Экспертные оценки разных специалистов могут существенно различаться в зависимости от их опыта, квалификации и интуиции. Определенная объективизация процесса формирования функции желательности может быть достигнута различными путями. Одним из наиболее распространенных является метод агрегирования мнений группы экспертов. Рассмотрим ситуацию, когда экспертам предложено количественно оценить значения реперных точек трапецидальной функции желательности $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Ясно, что в общем случае, для каждой из реперных точек экспертами будут даны различающиеся оценки. Наиболее простым способом построения на их основе функции желательности является усреднение мнений экспертов. Однако при этом утрачивается значительная часть информации. Для ее сохранения и использования построим на основе множества экспертных оценок функции принадлежности для каждой из реперных точек. Ясно, что при большом числе экспертов можно получить даже частотные распределения значений этих точек. Далее на базе функций принадлежности полученных нечетких интервалов, описывающих реперные точки, сконструируем искомую функцию желательности для критерия качества. Отметим, что в литературе существуют определенные терминологические разногласия по поводу того, что называть нечетким интервалом, а что нечетким числом. Чаще всего под нечетким интервалом понимается трапецидальная форма нечеткой величины, а под нечетким числом – треугольная. Однако конструктивно, с точки зрения проведения вычислений, никаких принципиальных различий между этими определениями нет. Поэтому для удобства представления результатов и промежуточных вычислений мы будем пользоваться и тем, и другим терминами, хотя бы потому, что треугольник можно рассматривать, как частный случай трапеции.

На рис. 2.11 схематически показан левый фронт функции желательности, сконструированной предложенным способом.

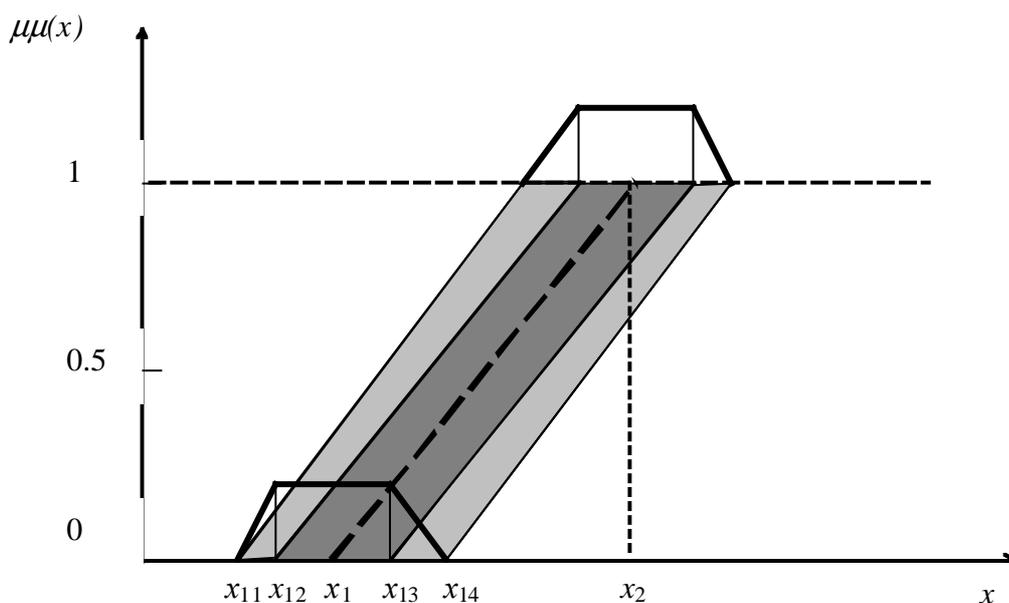


Рис. 2.11. Схема формирования левой части функции желательности на основе мнений экспертов, представленных нечеткими интервалами

Каждая из реперных точек x_i представлена соответствующим нечетким числом $\{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Построенная конструкция функции желательности близка понятию нечетких множеств второго уровня нечеткости, рассмотренному в § 1.1. При этом существует ряд специфических особенностей и отличий от классического понятия. Чтобы подчеркнуть эти различия в [201] предложено следующее определение:

О п р е д е л е н и е: Гипернечеткими множествами называются нечеткие множества, характеризующиеся функциями принадлежности трапецеидальной формы (нечетким интервалами), опорные точки которых в свою очередь сами являются нечеткими интервалами трапецеидальной формы.

Рассмотрим методику оперирования с такого рода объектами. Для удобства будем отождествлять понятия гипернечеткого множества и гипернечеткого интервала (числа), поскольку последние являются, по сути, конкретными математическими формами представления гипернечетких множеств.

Рис. 2.12 графически иллюстрирует структуру гипернечеткого числа на плоскости. Более темные участки соответствуют наибольшему единодушию среди экспертов относительно значения реперных точек, более светлые - разбросу в их представлениях.

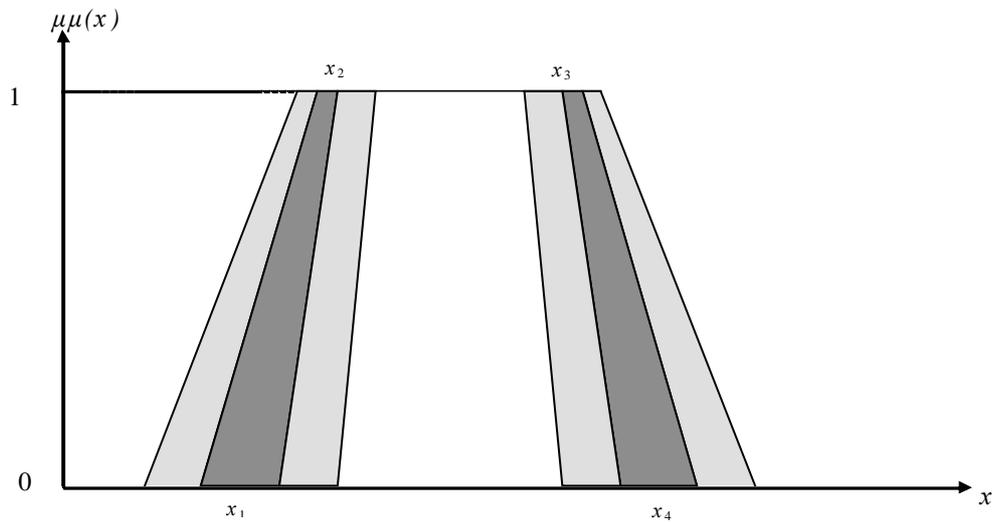


Рисунок 2.12 - Представление гиперчеткого числа на плоскости

На рис. 2.13 приведено объемное представление гиперчеткого числа, иллюстрирующее его структуру в пространстве функций желательности.

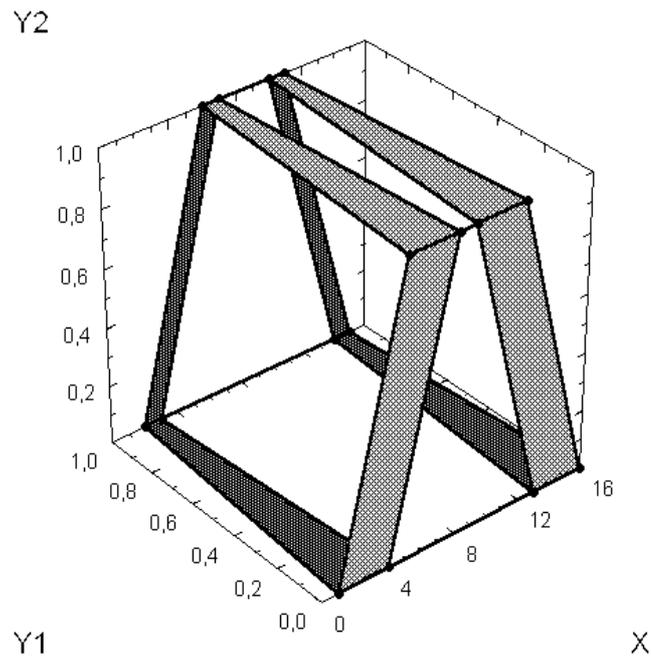


Рисунок 2.13. Объемное представление гиперчеткого числа: X - ось значений параметра; Y1 - функция желательности, учитывающая расхождения во мнениях экспертов о реперных точках; Y2 - функция желательности параметра

Для оперирования с гипернечеткими числами (интервалами) разработана конструктивная методика [201, 39], основой которой послужило предложенное формальное определение гипернечеткого интервала.

По аналогии с базовым определением нечеткого множества $A = \{\mu(x), x\}$ введем формальное определение гипернечеткого множества в виде $GX = \{\mu\mu(x), x\}$. В этой конструкции функция принадлежности $\mu\mu(x)$ является гипернечетким интервалом вида:

$$GX = (G1, G2, G3, G4),$$

где GI ($I = 1, 2, 3, 4$) – нечеткие трапециевидальные числа, представляющие собой реперные точки (в форме нечетких интервалов) гипернечеткого трапециевидального числа:

$$GI = (GI_1, GI_2, GI_3, GI_4),$$

где GI_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – четкие реперные точки нечеткого интервала GI .

Отметим, что сформулированное определение ограничивает рассмотрение гипернечетких и формирующих их нечетких чисел только случаем их представления в трапециевидальном виде. Нетрудно дать и более общее определение, однако, в силу своей абстрактности оно будет чересчур формализовано в связи с чем возникнут трудности его использования в прикладных использованиях. Практика показывает, что трапециевидальные формы являются вполне достаточным уровнем абстракции для формализации неопределенностей в большинстве реальных ситуаций.

Положим далее, что существует некоторый частный критерий, описываемый функцией желательности, представленной гипернечетким числом GX (рис. 2.14). Пусть, далее, $x^* \in X_{GX}$ – некоторое четкое число, соответствующее определенному конкретному значению анализируемого показателя качества.

Тогда в рамках сформулированных определений значением введенной гипернечеткой функции принадлежности (описывающей гипернечеткое число GX) для фиксированного аргумента x^* будет обычное трапециевидальное нечеткое число $G(x^*)$:

$$G(x^*) = \{(g_1(x^*), g_2(x^*), g_3(x^*), g_4(x^*)), x^* \in X_{GX}\}.$$

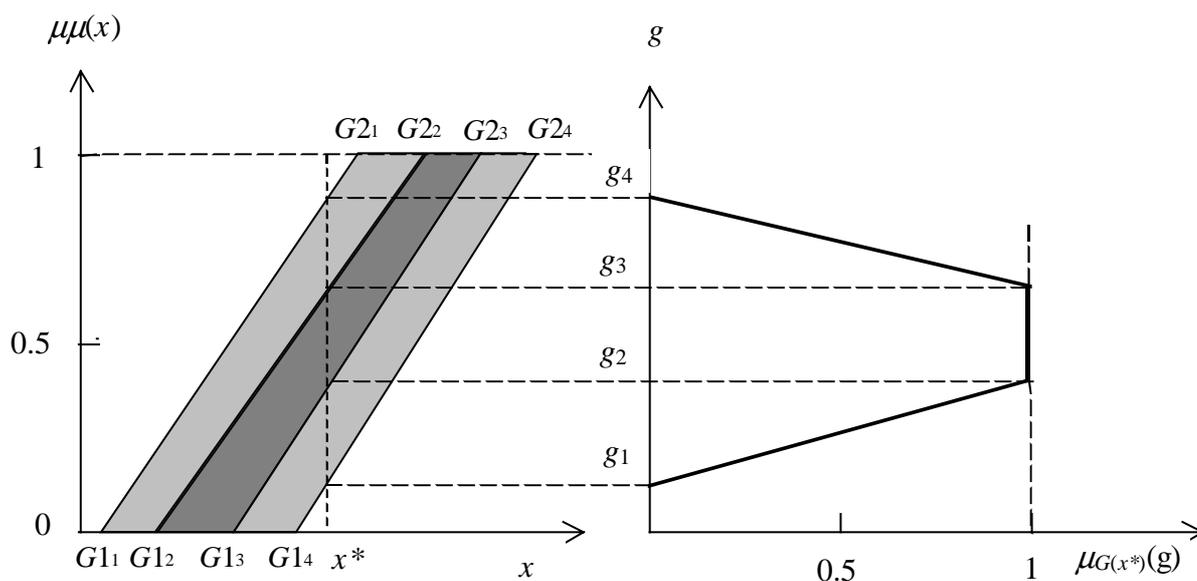


Рис. 2.14. Отображение четкого числа x^* на левую часть трапецидального гипернечеткого числа

Последнее утверждение для левого фронта гипернечеткого интервала графически иллюстрирует рис. 2.14, на котором наглядно видно, что получаемое в качестве итогового результата нечеткое число $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ можно рассматривать как отображение четкого числа $x^* \in X_{GX}$ (показатель качества) на гипернечеткое число, представляющее собой описание частного критерия.

Соответствующая ситуация для правого фронта трапецидального гипернечеткого числа графически представлена на рис. 2.15.

Из анализа построений на рис. 2.14, 2.15 следует, что результат вычисления значений гипернечеткой функции $G(x^*)$ определяется в наиболее общей ситуации следующими двумя базовыми вариантами взаимного расположения аргумента x^* и фронтов гипернечеткого числа.

Первый вариант характеризуется условием $G1_1 \leq x^* \leq G2_4$ (рис. 2.14). При этом реперные точки отображения $G(x^*)$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 g_4 &= (x^* - G1_1) / (G2_1 - G1_1), & g_3 &= (x^* - G1_2) / (G2_2 - G1_2), \\
 g_2 &= (x^* - G1_3) / (G2_3 - G1_3), & g_1 &= (x^* - G1_4) / (G2_4 - G1_4).
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

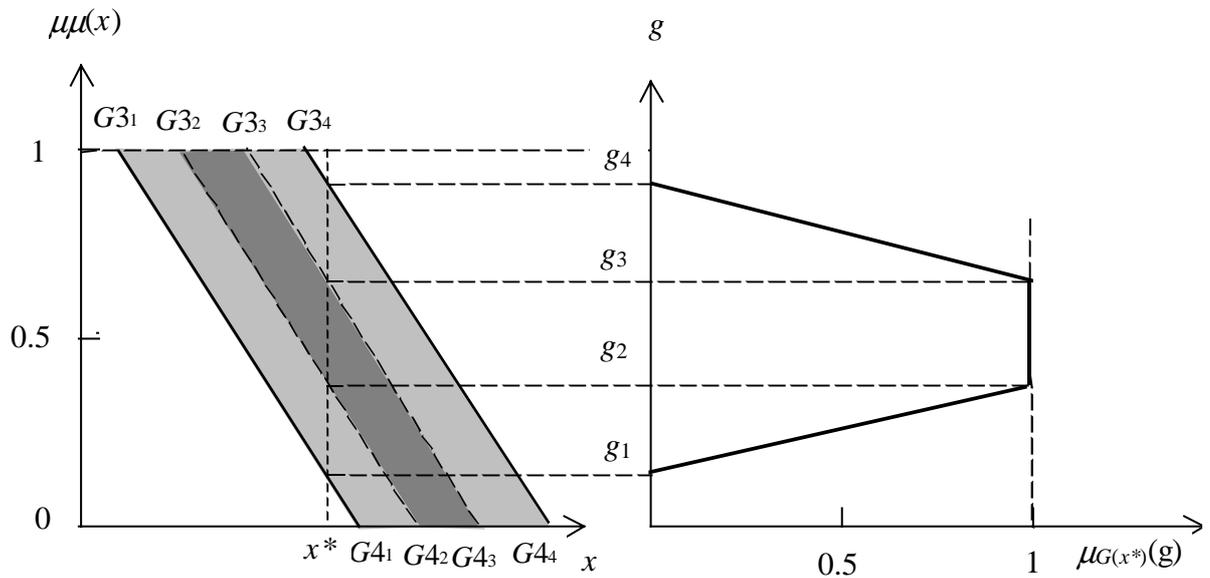


Рис. 2.15. Отображение четкого числа x^* на правую часть трапецидального гипернечеткого числа

Второй вариант отвечает соотношению $G3_1 \leq x^* \leq G4_4$ (рис. 2.15). Выражения для вычисления координат отображения, аналогично (2.3), принимают вид

$$G_k = (G4_k - x^*) / (G4_k - G3_k), \quad k = (1, \dots, 4). \quad (2.4)$$

Отметим, что вырожденной ситуацией является промежуточный вариант $G2_4 \leq x^* \leq G3_1$, когда результатом отображения $G(x^*)$ является обычное четкое число, равное единице.

На рис. 2.16 – рис. 2.18 представлены возможные различные частные случаи реализации вариантов отображений (2.3), (2.4) четкого числа x^* на трапецидальный гипернечеткий интервал для левого фронта.

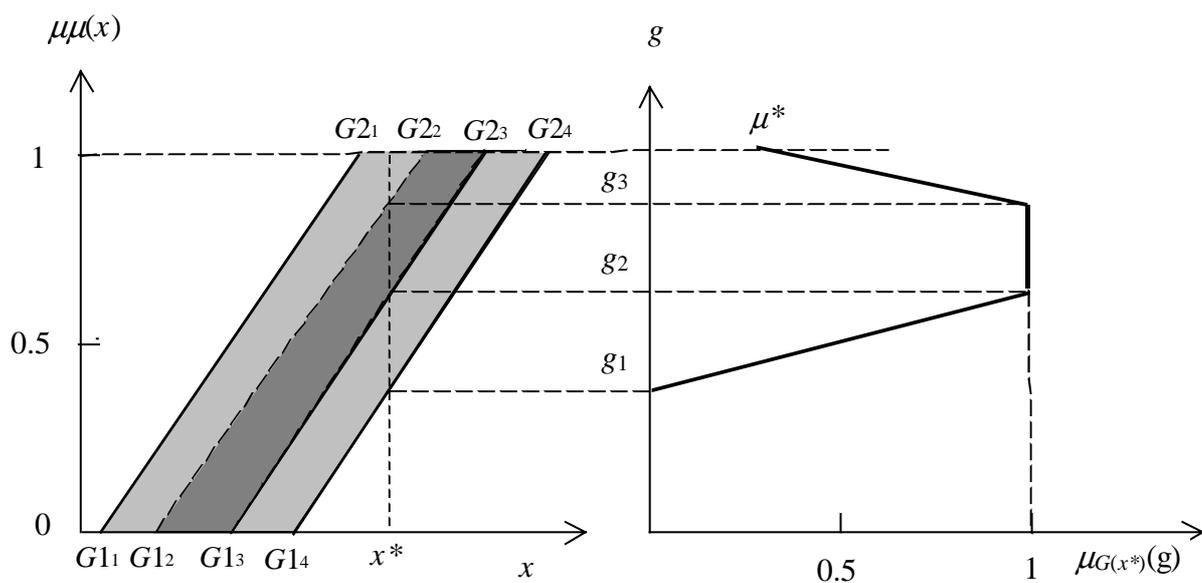


Рис. 2.16. Случай отображения четкого числа x^* на гипернечеткое трапецидальное число, с результирующим нечетким числом в форме незавершенной трапеции $G_{21} \leq x^* \leq G_{22}$

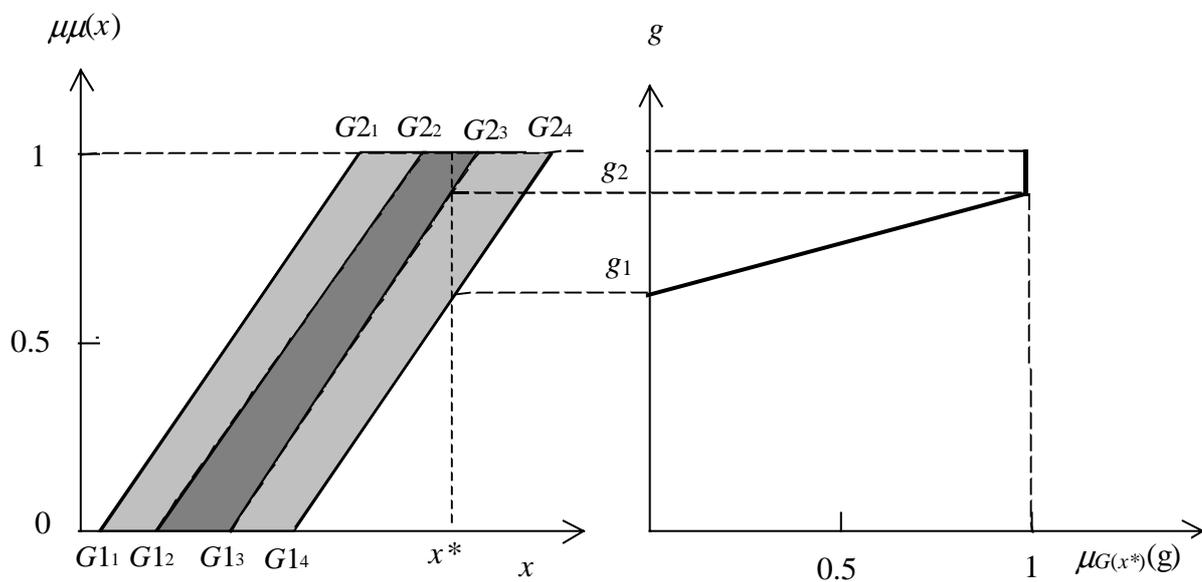


Рис. 2.17. Случай отображения четкого числа x^* на гипернечеткое трапецидальное число, с результирующим нечетким числом в форме полутрапеции $G_{22} \leq x^* \leq G_{23}$

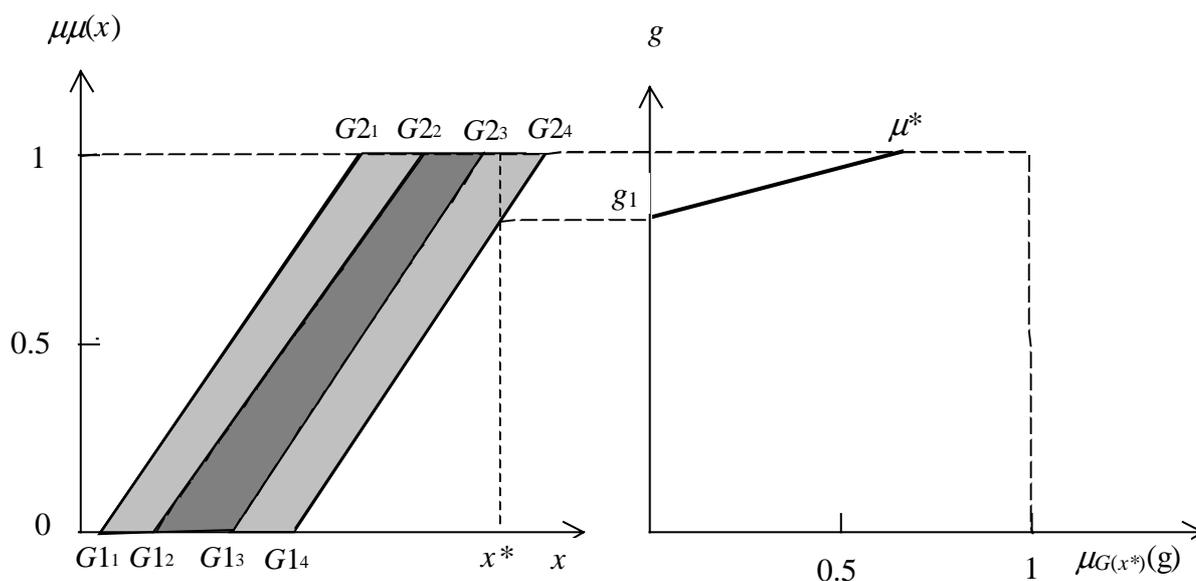


Рис. 2.18. Случай отображения четкого числа x^* на гипернечеткое трапецидальное число, с результирующим нечетким числом в форме незаконченной полутрапеции $G2_2 \leq x^* \leq G2_4$

Как следует из графических иллюстраций 2.14 – 2.18, в результате отображения в зависимости от месторасположения точки x^* получаются различные формы нечетких интервалов. Для случаев, представленных на рис. 2.14, 2.15, расчеты отображений производятся по формулам 2.3. Для вырожденной ситуации, отвечающей рис. 2.16, базовые реперные точки g_1, g_2, g_3 вычисляются также по формулам 2.3, а выражение для μ^* имеет вид:

$$\mu^* = (g_4 - 1) / (g_4 - g_3),$$

где $g_4 = (x^* - G1_1) / (G2_1 - G1_1)$.

Для случая, представленного на рис. 2.17, координаты g_1 и g_2 , рассчитываются по формулам. Для ситуации, представленной на рис. 2.18, реперная точка g_1 определяется формулой 2.3, а величина μ^* рассчитывается по формуле

$$\mu^* = (1 - g_1) / (g_2 - g_1),$$

где $g_2 = (x^* - G1_3) / (G2_3 - G1_3) > 1$.

В частной ситуации, представленной на рис. 2.19, при $g_4 > 1$, μ^* определяется аналогично и имеет вид:

$$\mu^* = (g_4 - 1) / (g_4 - g_3).$$

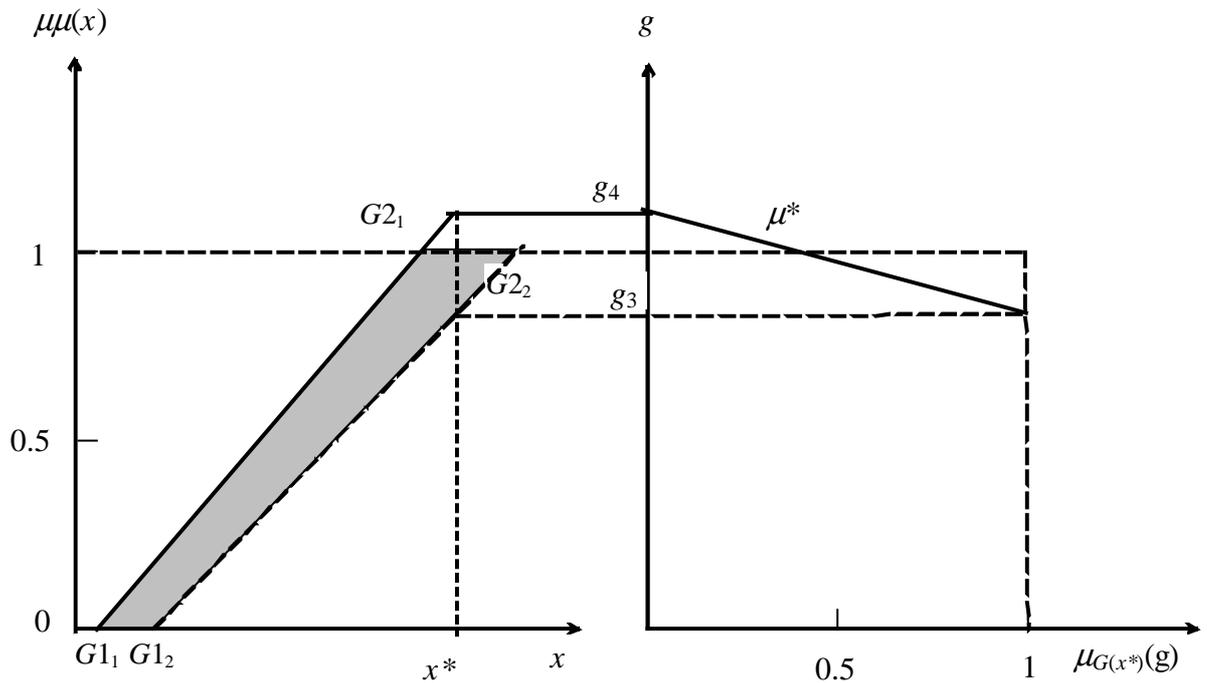


Рис. 2.19 - Геометрические построения, необходимые для вычисления значения μ^*

Наиболее общая ситуация, возникающая при отображении гипернечеткого числа, описываемого функцией принадлежности $\eta\eta$ на нечеткое число, представленное функцией желательности μ , графически проиллюстрирована на рис. 2.20.

Как видно из рис. 2.20, в этом случае в результате отображения получаются два нечетких интервала, т.е. имеет место неоднозначность отображения. Наиболее разумным решением в такой ситуации представляется выбор наибольшего нечеткого интервала, в наиболее представительной форме характеризующего результаты отображения (нечетко-интервального расширения) $\mu(\eta\eta(x))$.

В общем случае трапецеидальной функции μ в зависимости от конкретной ситуации в результате отображения можно получить разное количество итоговых нечетких интервалов, среди которых следует выбрать наибольший (методика сравнения нечетких интервалов описана в главе I).

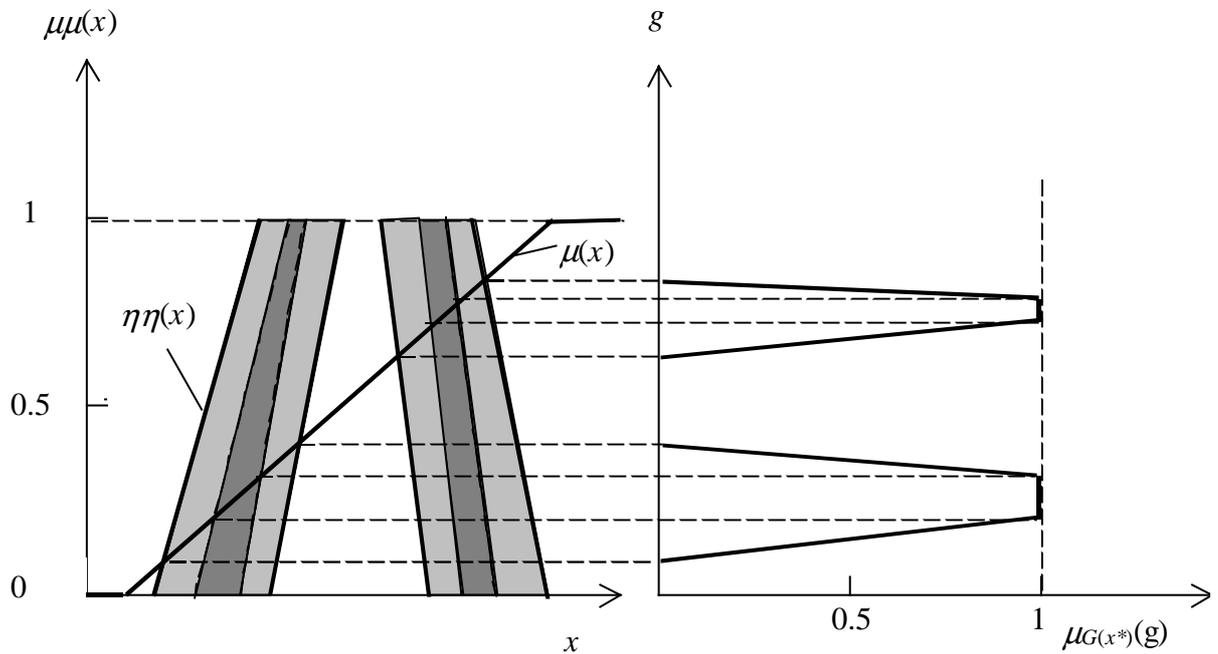


Рис. 2.20. Отображение гипернечеткого числа, описываемого функцией принадлежности $\eta\eta$, на нечеткое число, описываемое функцией принадлежности μ .

Изложенная методика оперирования с гипернечеткими числами при оценке частных критериев является составной частью «базовой» методики оценки качества, включающей в себя все необходимые для сформулированных задач математические операции с нечеткими и гипернечеткими числами.

§ 2.2. Агрегирование частных критериев

Эффективность функционирования достаточно сложных реальных объектов или процессов, как правило, характеризуется совокупностью частных критериев, находящихся зачастую во взаимном противоречии друг с другом, когда улучшение по одному из показателей ведет к ухудшению по другому и наоборот, и удовлетворение требованиям всех критериев невозможно. Кроме того, критерии, а также ограничения, обычно сформулированы весьма неточно. В этих условиях отыскание эффективных решений невозможно без учета неточной, качественной информации о предпочтениях различных критериев, о желаемом характере процессов – росте или уменьшении параметров качества, о диапазоне их изменения.

По мере усложнения задачи роль такого рода неточной качественной информации возрастает и во многих случаях становится определяющей [27]. Как указывается в [23], при наличии всего лишь двух критериев в задачах оптимизации неизбежно присутствуют субъективные факторы, связанные, например, с ранжированием частных критериев. В определенной степени подобные трудности могут быть устранены путем упрощения постановки задачи. Например, можно выделить какой-либо один главный критерий качества, а остальные рассматривать как ограничения. Другим путем является использование метода последовательных уступок [23].

Однако такие подходы ведут к огрублению исходной задачи и не устраняют качественные, субъективные элементы, перенося их из постановки задачи на этап анализа результатов. Потребность количественного ранжирования частных критериев и неопределенность при их описании в задачах многокритериальной оптимизации объективно являются источниками субъективизма, неопределенности. Необходимость использования информации качественного характера признается многими исследователями, и предложены различные пути формализации и решения этой проблемы.

Один из подходов формализации субъективных неопределенностей в многокритериальных задачах был разработан в 1963 году Е.С.Харрингтоном. Для описания частных критериев и ограничений им было предложено использование функций желательности. Последние принимают значения, непрерывно возрастающие от 0 до 1 при изменении соответствующих параметров качества от наименее к наиболее желательным значениям. Конкретный вид функций желательности задается лицом, принимающим решения (ЛПР), исходя из его субъективных представлений. Путем свертки частных функций желательности строится глобальный критерий качества процесса, максимизация которого доставляет оптимум.

Метод Харрингтона получил широкое распространение в планировании экспериментов при поиске оптимальных условий [3]. Он успешно применялся при решении задач оптимизации процессов химической технологии [57], обработки материалов [59], в металлургии [99] и в других отраслях. Из определения функций желательности следует, что при решении задач оптимизации они как по форме, так и своему смысловому содержанию фактически эквивалентны функциям принадлежности нечетких множеств. Однако метод Харрингтона не оказался подкрепленным конструктивным математическим аппаратом и не получил широкого развития. В настоящее время он используется скорее как некоторый практический прием при оптимальном планировании эксперимента.

Другой подход к методам формализации описания нечетких, качественных характеристик был предложен Л.А.Заде [338] два года спустя после статьи Е.С.Харрингтона. Теория нечетких множеств, особенно ее концептуальная основа и математический аппарат для работы с объектами лингвистической природы, оказались плодотворными, эффективными средствами постановки и решения задач многокритериальной оптимизации при наличии неопределенностей нестатистического характера. При этом следует отметить, что существует чрезвычайно большое многообразие такого рода задач, и поэтому не существует единой универсальной методики их решения [24].

Основные результаты, достижения и проблемы в области нечеткой многокритериальной оптимизации и принятия решений изложены в литературе обзорного [194, 301, 94] и постановочного характера [13, 271, 217]. В работах [16, 12, 14, 305] для построения моделей принятия решений в условиях неопределенности используется лингвистический подход, позволяющий формализовать задачу при наличии критериев и ограничений, описанных на естественном языке. В [153, 280, 323, 326] задачи нечеткой многокритериальной оптимизации решены при наличии нечетких коэффициентов относительной важности критериев.

В статьях [326, 15] предложен подход, основанный на теории возможностей, развитой Л.А.Заде на базе теории нечетких множеств, в [324] рассматриваются задачи многокритериального принятия решений при наличии неопределенностей как нечеткого, так и вероятностного типов.

Сформулируем основные особенности многокритериальных задач при наличии нечетко заданных критериев.

В настоящее время большинством исследователей отмечается, что ключевыми чертами постановки этих задач являются [24]: а) существование множества альтернатив; б) наличие множества ограничений, которые необходимо учитывать при выборе альтернативных решений; в) существование (в явной или неявной форме) функции предпочтительности, ставящей каждой альтернативе в соответствие выигрыш (или проигрыш), который будет получен при выборе этой альтернативы.

Специфической чертой нечетких задач также является симметрия между целями и ограничениями, которая устраняет различия между ними с точки зрения их вклада в постановку и решение задач [165]. Сформулируем это положение в конструктивной форме. Пусть G – нечеткая цель, C – нечеткое ограничение в пространстве X . Тогда нечеткое множество $D = G \cap C$ является единственным, полным критерием оптимальности. D

характеризуется функцией принадлежности $\mu_D(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x)$, $x \in X$. При наличии n целей и m ограничений имеем

$$D = G_1 \cap \dots \cap G_n \cap C_1 \cap \dots \cap C_m. \quad (2.5)$$

$$\mu_D(x) = \mu_{G_1}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{C_1}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{C_m}(x)$$

Последний результат означает, что в отличие от классических задач оптимизации, подход, основанный на использовании нечетких множеств, не делает различий между целями и ограничениями. Следует отметить [21], что в некоторой степени это характерно и для ряда традиционных классических методик. Так, использование множителей Лагранжа и штрафных функций выявляет существование определенного сходства между критериями и ограничениями.

Отметим, что при постановке многокритериальных задач, чаще всего встречаются ситуации, когда цели заданы в пространстве Y , отличном от пространства параметров качества. При этом, однако, всегда существует отображение, переводящее X в Y , $f: X \rightarrow Y$, т.е. $Y = f(X)$. В этом случае использование принципа обобщения позволяет перевести рассмотрение задачи в пространство X на основе следующего отображения $\mu_G(x) = \mu_G(f(x))$.

При этом выражение (2.5) можно рассматривать как нечетко сформулированную инструкцию, реализация которой обеспечивает достижение расплывчатой цели. В этом случае остается неопределенность, связанная со способом реализации подобной нечеткой инструкции, т.е. с тем, какую альтернативу выбрать. Различные способы решения этой проблемы предложены, например, в статье [337]. Наиболее простым и распространенным способом является поиск альтернатив, максимизирующих μ_D и отвечающих задаче

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min \{ \mu_G(x), \mu_C(x) \}, \quad (2.6)$$

где $\mu_G(x)$ – пересечение всех целей, $\mu_C(x)$ – пересечение всех ограничений.

Для случаев, когда цели и ограничения различаются по важности, обобщенный критерий D можно сформировать как их выпуклую комбинацию с весовыми коэффициентами, характеризующими их относительную значимость [165].

$$\mu_D(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^m b_j(x) \mu_{C_j}(x), \quad (2.7)$$

где $\sum_{i=1}^n a_i(x) + \sum_{j=1}^m b_j(x) = 1$.

Этот подход развит в работе [280]. Выражение (2.7) в сущности, сводит векторный критерий к скалярному с помощью образования линейной комбинации компонент векторной функции цели.

В монографии [102] обобщенный критерий предлагается формировать в виде:

$$\mu_D(x) = \min\{a_1(x) \mu_{G_1}(x), \dots, a_n(x) \mu_{G_n}(x), b_1(x) \mu_{C_1}(x), \dots, b_m(x) \mu_{C_m}(x)\}. \quad (2.8)$$

Конструктивным, достаточно полно отражающим качественный характер задания предпочтений в многокритериальной задаче является подход, предложенный Р.Егером, основанный на обобщении понятий концентрирования и растяжения [326].

Обобщенный критерий предлагается формировать в виде

$$D = G_1^{a_1} \cap G_2^{a_2} \cap \dots \cap G_n^{a_n} \cap C_1^{b_1} \cap \dots \cap C_m^{b_m} \quad (2.9)$$

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}^{a_1}(x), \dots, \mu_{G_n}^{a_n}(x), \mu_{C_1}^{b_1}(x), \mu_{C_m}^{b_m}(x)\}, \quad (2.10)$$

где $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ – неотрицательные коэффициенты относительной важности частных критериев (ранги), подчиняющиеся условию

$$\frac{1}{n+m} \left(\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^m b_j \right) = 1. \quad (2.11)$$

В [326] показано, что возведение в степень, большую единицы, ужесточает требования к выполнению критерия, т.е. делает его более важным. Возведение в степень, меньшую единицы, наоборот, снижает требования к удовлетворению критерия. При этом сохраняются нормировки функций принадлежности всех критериев и ограничений. С одной

стороны, подход Р.Егера позволяет проводить ранжирование частных целей и ограничений в соответствии с интуитивными представлениями о задании той или иной жесткости требований к достижению целей. С другой стороны, этот подход позволяет естественным образом использовать операцию пересечения для формирования совокупности критериев.

Для оценки коэффициентов относительной важности Р.Егер [288] использовал методику Т. Саати [287]. Т. Саати предложил получать решение для вектора рангов W из уравнения вида $AW = \lambda_{max}W$, где λ_{max} – максимальное собственное значение матрицы парных сравнений критериев A . В [182] показано, что задачу определения вектора рангов W можно свести к проблеме минимизации функционала

$$S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (A_{ij}\alpha_j - \alpha_i)^2 \text{ при ограничении } \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1.$$

Используя обширный фактический материал, авторы [182] показали предпочтительность своей методики по сравнению с предложенной Т.Саати.

Из проведенного анализа следует, что для формирования глобального критерия используются различные варианты свертки частных критериев. В статье [325] полагается, что в силу их различия, у лица, принимающего решение, существует некоторая нечеткая шкала оценок таких вариантов, отражающая нечеткие представления этого лица о наилучшем, идеальном способе формирования решения. Так, пусть заданы X – пространство альтернатив и множество $D_j(x)$, $j = 1, \dots, M$ различных способов представления решения (например, (2.7), (2.8), (2.9)). Пусть $v(D_j)$ – степень, с которой D_j удовлетворяет требованию быть идеальным способом агрегирования частных критериев в конкретной задаче. Тогда, согласно [325], идеальное решение можно определить как

$$D = \left\{ \frac{v(D_j)}{D_j} \right\} \quad (2.12)$$

По сути дела, таким образом абстрактное понятие идеального решения определяется через его свойства в терминах решаемой задачи. В [325] показано, как при помощи нечетких множеств типа 2 можно определить D в терминах пространства альтернатив X , после чего для нахождения наилучшей альтернативы можно использовать выражение (2.10).

Использование теории нечетких множеств делает многокритериальные задачи принятия решений более информативно содержательными, позволяя учитывать качественную, нечетко заданную информацию в явном виде. Как указал Н.Н.Моисеев в

предисловии к книге [102], до работ Л.А.Заде подобная качественная информация по существу просто терялась - было непонятно, как ее использовать в формальных схемах анализа альтернатив. В то же время, как указывалось выше, уже простейшие задачи с двумя критериями неизбежно содержат в себе элементы субъективизма.

При этом одной из важнейших проблем является формирование глобального критерия качества для равнозначимых и неравнозначимых частных критериев и ограничений.

Характерной чертой большинства реальных процессов является непрерывность изменения параметров, определяющих критерии оптимальности.

В таких условиях пространство альтернатив становится бесконечным, что делает невозможным применение методов теории принятия решений, основанных на анализе частных показателей качества при конечном наборе решений [105]. Такие задачи обычно решаются путем формирования тем или иным способом свертки частных критериев и ограничений в некоторый глобальный показатель качества, экстремум которого определяет точку оптимума. Как указывается в [88], процедура свертки не может быть до конца формализована и определяется спецификой задачи, целями, опытом и интуицией исследователя. В работе [99] показано, что различные способы свертки критериев могут приводить к существенно отличающимся итоговым результатам, что свидетельствует об определяющем значении этапа формирования глобального критерия при решении многокритериальных задач.

Поэтому, несмотря на отсутствие общей теории, целесообразно рассмотреть некоторые узловые моменты процесса формирования свертки частных критериев, провести сравнительный анализ наиболее часто употребляемых способов построения обобщенного показателя качества при описании частных критериев функциями принадлежности. Учитывая замечание, сделанное в предыдущем параграфе об эквивалентности функций принадлежности и функций желательности Харрингтона, в дальнейшем будем пользоваться термином «функция желательности» как более простым и удобным в контексте задач оптимизации.

2.2.1. Ранжирование частных критериев в условиях неопределенности

Как отмечалось ранее, при решении задач многокритериальной оценки и оптимизации необходимо учитывать неравнозначность частных критериев качества. В случае большого числа критериев задача непосредственного определения рангов критериев оказывается весьма трудной и даже неразрешимой для экспертов в силу ограниченности психико-физиологических возможностей человека. При этом в случае сравнения двух

альтернатив эксперт обычно способен адекватно определить, у какой из них рассматриваемый признак (важность) выражен сильнее, а также качественно (вербально) оценить, насколько велика разница между наблюдаемыми у двух альтернатив признаками.

Рассмотрим более подробно задачу определения значимости рангов частных критериев на основе их попарного сравнения.

Попарное сравнение всех частных критериев проведем с помощью шкалы лингвистических оценок. На практике экспертные заключения часто имеют характер суждений типа: «продолжительность простоя на асфальтобетонном заводе несколько предпочтительнее продолжительности простоя автомобилей при разгрузке» или «продолжительность простоя автомобилей на погрузке и разгрузке одинаково значимы». Построение таких лингвистических оценок обычно не вызывает затруднений у специалистов.

В соответствии с широко распространенным подходом [291] лингвистическую шкалу построим состоящей из девяти градаций оценок относительной важности (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Лингвистические оценки относительной важности

Качественная оценка	Количественная оценка a_{ij}
Строго эквивалентны (одинаково значимы)	1
Слабо предпочтительнее	3
Несколько предпочтительнее	5
Значительно предпочтительнее	7
Строго предпочтительнее	9
Промежуточные значения важности	2, 4, 6, 8
Оценка сравнения элемента j с элементом i (a_{ji}) имеет обратное значение a_{ij}	$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$

Такая шкала отражает особенности человека как субъекта принятия решений и обработки информации. Человек плохо воспринимает излишне детализированные шкалы значений признаков. Психофизические данные свидетельствуют о том, что человек уверенно различает не более 7 ± 2 градаций на шкале некоторого признака (параметра). Если же шкала содержит большее число градаций, то соседние уровни начинают сливаться, и уже не могут быть с уверенностью разграничены [83]. На практике часто используют только пять

основных нечетных оценок шкалы и этого оказывается достаточно при сравнении двух альтернатив или критериев. Сделанным лингвистическим суждениям экспертов в соответствии с таблицей 2.1 присваиваются соответствующие численные оценки от 1 до 9. В табл. 2.1 через a_{ij} обозначена оценка значимости критерия i по отношению к критерию j . На основе всех определенных попарных оценок a_{ij} далее строится матрица парных сравнений $A = \{a_{ij}\}$.

Так, пусть исследуемая система характеризуется тремя критериями x_1, x_2, x_3 . Между ними существуют отношения: x_2 почти эквивалентен x_1 и строго предпочтительнее x_3 , а x_3 несколько предпочтительнее x_1 . Тогда в соответствии с табл. 2.1 матрица парных сравнений $A\{a_{ij}\}$ частных критериев x_i ($i = 1, 2, 3$) исследуемой системы будет выглядеть следующим образом:

	x_1	x_2	x_3
x_1	1	1/3	1/5
x_2	3	1	9
x_3	5	1/9	1

Выбор девяти лингвистических градаций значимости далеко не случаен. Дело в том, что в естественных языках большинства народов используются также не более девяти вербальных оценок относительной значимости (предпочтительности). Формулировки оценок могут быть иными, но число их практически постоянно – таковы, как показывают результаты психофизиологических исследований, особенности нашего мышления [14]. Словесным оценкам парной важности поставлены в соответствие числа натурального ряда. Ясно, что это необходимо для получения количественных результатов. Однако на практике не рекомендуем показывать экспертам какие-либо числа. Оценки на основе лингвистической шкалы надежнее. Дело в том, что если предложить группе специалистов оценить известные им объекты, то вербальные оценки окажутся весьма близкими. Иначе и быть не может: люди учились по одним и тем же учебникам, читают одни и те же статьи, работают в общей для них отрасли. Однако если удастся уговорить их использовать для оценок цифры (цифры никто не любит), то никакого единодушия уже не будет. Последнее подтверждается результатами обширных маркетинговых исследований [349], в которых потребителям предлагалось оценить качество различных товаров. Дело в том, что «в начале было слово», цифры появились значительно позже, чем слова естественных языков.

Рассмотрим подробнее методику нахождения рангов частных критериев на основе матрицы парных сравнений [182]. Пусть A - матрица парных сравнений, построенная на основе определенных экспертами значений элементов матрицы a_{ij} . Через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ обозначим искомые значения коэффициентов относительной значимости критериев. $W = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - вектор коэффициентов относительной важности (рангов); n - количество частных критериев.

Для каждого элемента матрицы парных сравнений справедливо $a_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$. По содержательному смыслу ранги α_i - это значения вкладов соответствующих частных критериев, иными словами коэффициенты предпочтительности этих критериев. Тогда их совокупность $W = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ отвечает собственному вектору матрицы A . Поэтому вектор W может быть найден как решение уравнения $AW = \lambda W$, где λ - собственное значение матрицы A . Используя условие нормализации $\sum_{i=1}^n \alpha_i / n = 1$, применяя известные методы отыскания собственных векторов, можно рассчитать численные значения рангов α_i .

В реальных ситуациях элементы матрицы парных сравнений не точны из-за того, что они отражают субъективное мнение эксперта. В этих условиях значение W можно вычислить как вектор, минимизирующий функционал [182]:

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \frac{\alpha_i}{\alpha_j})^2 \rightarrow \min. \quad (2.13)$$

Легко заметить, что при этом искомые значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ являются решением оптимизационной задачи:

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}\alpha_j - \alpha_i)^2 \rightarrow \min; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = n. \quad (2.14)$$

Эффективным методом решения задачи минимизации функции многих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наличии ограничений, заданных в форме равенств $g_i(x) = 0, i = 1, \dots, k$, является широко распространенный метод неопределенных множителей Лагранжа [112]. Для его использования обычно строится функция Лагранжа $n+k$ переменных:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x), \quad (2.15)$$

где $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ - неопределенные множители.

В итоге исходная задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной минимизации функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_i^k \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0, i = 1, \dots, k. \quad (2.16)$$

Соотношения (2.16) образуют систему $n + k$ уравнений с $n + k$ неизвестными $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Для задачи (2.14) в соответствии с (2.15) функция Лагранжа принимает вид:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} \alpha_j - \alpha_i)^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - n \right). \quad (2.17)$$

Необходимые условия оптимальности (2.16) для функции Лагранжа (2.17) принимают вид:

$$\frac{dL}{d\alpha_i} = 0; \quad \frac{dL}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n \alpha_i - n = 0. \quad (2.18)$$

Выписывая соотношения (2.18) в явном виде, получим систему $n+1$ уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a_{21}^2 + a_{31}^2 + \dots + a_{n1}^2 + (n-1))\alpha_1 - (a_{21} + a_{12})\alpha_2 - (a_{31} + a_{13})\alpha_3 - \dots - (a_{n1} + a_{1n})\alpha_n + \lambda = 0, \\
 -(a_{12} + a_{21})\alpha_1 + (a_{12}^2 + a_{32}^2 + \dots + a_{n2}^2 + (n-1))\alpha_2 - (a_{32} + a_{23})\alpha_3 - \dots - (a_{n2} + a_{2n})\alpha_n + \lambda = 0, \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 -(a_{1n} + a_{n1})\alpha_1 - (a_{2n} + a_{n2})\alpha_2 - \dots - (a_{(n-1)n} + a_{n(n-1)})\alpha_{n-1} + (a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \dots + a_{(n-1)n}^2 + \\
 + (n-1))\alpha_n + \lambda = 0, \\
 \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = n.
 \end{array} \right.$$

Решением этой системы являются искомые коэффициенты относительной важности частных критериев – ранги α_i и множитель Лагранжа λ . Численное решение полученной системы линейных алгебраических уравнений можно найти любым методом, например, методом Гаусса.

Широкое распространение для отыскания рангов критериев на основе матрицы парных сравнений получил приближенный метод, предложенный Т. Саати [287]. Этот подход заключается в отыскании приближенных значений вектора рангов, как среднегеометрических величин каждой строки матрицы парных сравнений. Полученные таким образом среднегеометрические значения собственного вектора нормализуются делением на сумму средних геометрических:

$$\alpha'_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}, \quad \alpha_i = \alpha'_i / \sum_{i=1}^n \alpha'_i \quad (2.19)$$

Приближенный метод Т. Саати вследствие своей простоты получил широкое распространение. Проведем сравнение результатов его использования с результатами ранжирования критериев на основе описанной выше методики решения задачи оптимизации (2.14).

Сопоставление двух подходов выполним на основе использования классического примера, взятого из [116]. Предположим, что для общей оценки качества дома перед его

покупкой, необходимо проранжировать его частные критерии. В результате опроса экспертов получена матрица парных сравнений, которая представлена в таблице 2.2 .

Таблица 2.2. Матрица парных сравнений частных критериев оценки дома

Показатели удовлетворения домом	Размеры дома	Удобство автобусных маршрутов	Окрестности	Возраст дома	Двор	Современное оборудование	Общее состояние	Финансовые условия
Размеры дома	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
Удобство автобусных маршрутов	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
Окрестности	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5
Возраст дома	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
Двор	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
Современное оборудование	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
Общее состояние	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2
Финансовые условия	4	7	5	8	6	6	2	1

Информативным показателем достоверности определения рангов является индекс согласованности (ИС) матрицы парных сравнений A , который дает информацию о степени нарушения численной (кардинальной $a_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$) и транзитивной (порядковой) согласованности парных сравнений. В случае плохой согласованности рекомендуется поиск дополнительной информации и пересмотр данных, использованных при построении матрицы парных сравнений.

Индекс согласованности для каждой матрицы рассчитывается на основе оценки максимальной величины собственного значения матрицы, λ_{\max} . Он может быть приближенно получен следующим образом: сначала суммируется каждый столбец матрицы парных сравнений, затем сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного вектора рангов, сумма второго столбца - на вторую компоненту и т. д. Затем полученные числа суммируются. Таким образом получается значение λ_{\max} .

Индекс согласованности рассчитывается по формуле $ИС = (\lambda_{max} - n)/(n-1)$, где n – размерности матрицы парных сравнений. Для обратносимметричной матрицы всегда $\lambda_{max} \geq n$. Чем более парные сравнения, тем меньше ИС.

На основе индекса согласованности ИС рассчитывается показатель отношения согласованности ОС: $ОС = ИС/СС$, где СС – значение согласованности случайной матрицы того же порядка. Средние значения согласованности СС для случайных матриц разного порядка, полученные при случайном выборе количественных парных оценок относительной важности из шкалы 1/9, 1/8, 1/7,...,1, 2,...,9 и образовании обратносимметричной матрицы, приведены в следующей таблице:

Размер матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

В [116] на основе обобщения опыта решения большого числа многокритериальных задач утверждается, что, для того, чтобы парные сравнения можно было считать согласованными, величина ОС должна быть менее, чем 10%. В ряде случаев приемлемой для практики согласованностью можно считать величину ОС до 20%. Если ОС выходит из этих пределов, то экспертам нужно пересмотреть задачу и проверить свои суждения.

Отметим, что в матрицах больших размеров, начиная с 7 - 9 элементов, часто трудно достигнуть высокого уровня согласованности. Тем не менее, минимальный уровень согласованности должен быть обеспечен.

В таблицах 2.3, 2.4 приведены результаты расчета рангов, ИС и ОС для рассматриваемого примера ранжировки критериев оценки дома (Табл. 2.2) на основе двух сравниваемых методик.

Таблица 2.3. Ранги и индексы согласованности в задаче выбора дома

Частные критерии оценки дома	Ранги (метод Т. Саати)	Ранги (задача оптимизации)
Размеры дома	0.173	0.137
Удобство автобусных маршрутов	0.054	0.054
Окрестности	0.188	0.121
Возраст дома	0.018	0.030
Двор	0.031	0.046

Новизна оборудования	0.036	0.046
Общее состояние	0.167	0.089
Финансовые условия	0.333	0.475
	$\lambda_{\max} = 9.669$ ИС = 0.238 ОС = 0.169	$\lambda_{\max} = 9.387$ ИС = 0.198 ОС = 0.14

Таблица 2.4. Отношения согласованности (ОС) в задаче выбора дома

Частные критерии оценки дома	Метод Т.Саати	Задача оптимизации
Размеры дома	0.117	0.053
Удобство автобусных маршрутов	0.210	0.110
Окрестности	0.117	0.054
Возраст дома	0	0
Двор	0.079	0.074
Новизна оборудования	0.170	0.102
Общее состояние	0	0
Финансовые условия	0.056	0.052

Как следует из анализа результатов, оценки рангов, критерии показателей согласованности ИС и ОС, полученные с использованием сравниваемых методик, могут различаться более, чем в два раза. При этом согласованность оценок при использовании методики оптимизации [182] во всех случаях существенно выше, чем при использовании приближенного метода Т.Saaty (значения ИС и ОС ниже). Это свидетельствует о существенных преимуществах методики, основанной на решении оптимизационной задачи (2.14) по сравнению с традиционным приближенным подходом.

Во многих практически важных случаях, для повышения достоверности экспертных оценок в построении матриц парных сравнений участвуют группы экспертов. В таких ситуациях в клетках исходных матриц парных сравнений будут содержаться некоторые массивы чисел. Простейшим способом использования коллективных оценок является усреднение их и оперирование со средними значениями оценок. Однако это приводит к существенной потере исходной информации.

Поэтому в таких ситуациях целесообразным представляется их агрегирование в форме четких или нечетких интервалов для каждой клетки матрицы парных сравнений.

Использование для этих целей частотных распределений, как правило, нерационально ввиду отсутствия необходимых для их построения статистических данных, а также в виду невозможности проведения арифметических операций непосредственно с частотными распределениями. Ясно, что при таком подходе результатам расчета коэффициентов важности на основе матриц парных сравнений, заполненных интервалами и нечеткими числами, будут нечеткие числа.

Для решения поставленной задачи можно использовать методику, основанную на нечетко-интервальном расширении приближенного метода Т. Саати. Использование в качестве базиса приближенного метода соответствует естественной ситуации нечеткого, приближенного характера исходных данных, требованиям согласования в той или иной мере точности и математической сложности метода и степени неопределенности исходных данных.

Методику построим на основе замены в выражениях (2.19) параметров a_{ij} их нечетко-интервальными представлениями (нечеткими интервалами). Нечетко-интервальное расширение выражений (2.19) требует выполнения операций нечетко-интервального умножения, сложения и деления, а также возведения нечеткого интервала в степень произвольного дробного числа. Обобщенную методику возведения в нечеткую степень нечеткого интервала построим на основе общей методологии разбиения нечетких чисел на α -уровни и интервального расширения функций.

Пусть μ и a - нечеткие интервалы, тогда в соответствии с правилами декомпозиции на α -уровни и интервального расширения функций процедуру возведения μ в степень a определим как $\mu^a = \bigcup_{\alpha} \mu_{\alpha}^{a_{\alpha}}$, где $\mu_{\alpha} = [\underline{\mu}_{\alpha}, \bar{\mu}_{\alpha}]$, $a_{\alpha} = [\underline{a}_{\alpha}, \bar{a}_{\alpha}]$ - четкие интервалы, соответствующие α -уровням.

В соответствии с общей методологией построения интервальной арифметики, выражение для четкого интервала, являющегося результатом возведения μ_{α} в степень a_{α} , представим в виде:

$$\mu_{\alpha}^{a_{\alpha}} = \left[\min \left\{ \mu_{\alpha}^{\underline{a}_{\alpha}}, \mu_{\alpha}^{\bar{a}_{\alpha}}, \bar{\mu}_{\alpha}^{\underline{a}_{\alpha}}, \bar{\mu}_{\alpha}^{\bar{a}_{\alpha}} \right\}, \max \left\{ \mu_{\alpha}^{\underline{a}_{\alpha}}, \mu_{\alpha}^{\bar{a}_{\alpha}}, \bar{\mu}_{\alpha}^{\underline{a}_{\alpha}}, \bar{\mu}_{\alpha}^{\bar{a}_{\alpha}} \right\} \right].$$

Одной из основных проблем интервальной и нечетко-интервальной математики является быстрый рост ширины результирующих интервалов с увеличением числа арифметических действий в решаемых задачах. Несмотря на то, что рост интервалов при

этом представляется неизбежным и соответствует общеметодологическим положениям, на практике это явление может приводить к неприемлемым результатам. В связи с этим было проведено тестирование разработанной методики нечетко-интервального расчета рангов.

В качестве четкого базиса использовалась матрица парных сравнений, представленная в таблице 2.2. Далее все элементы этой матрицы заменялись нечеткими числами. В качестве средних значений X нечетких чисел принимались численные значения элементов исходной четкой матрицы. Нечеткие числа во всех клетках матрицы задавались одинаковой максимальной ширины, равной 0.1 (рис. 2.21).

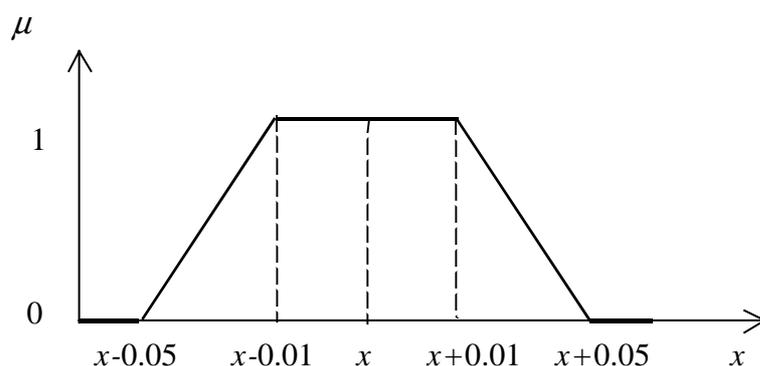


Рис. 2.21. Нечетко-интервальное расширение элементов матрицы парных сравнений

Результаты расчетов итоговых коэффициентов относительной значимости (рангов) в сравнении с рассчитанными четкими рангами представлены в таблице 2.5. Как видно из таблицы, максимальная ширина итоговых нечетких интервалов (x_4-x_1), соответствующих нечетким рангам, во всех случаях значительно меньше максимальной ширины исходных нечетких интервалов (рис. 2.21), являющихся элементами нечеткой матрицы парных сравнений. Ясно, что ОС также реализуется в виде нечеткого числа.

Таблица 2.5. Результаты расчета нечетких рангов и отношения согласованности ОС

№ критерия	Четкие значения рангов	Опорные точки нечетких интервалов, соответствующих нечетким рангам			
		x_1	x_2	x_3	x_4
1	0.173	0.155	0.171	0.179	0.197
2	0.054	0.050	0.060	0.065	0.076
3	0.188	0.131	0.145	0.152	0.169

4	0.018	0.013	0.018	0.020	0.026
5	0.031	0.028	0.034	0.037	0.044
6	0.036	0.033	0.040	0.044	0.052
7	0.167	0.147	0.163	0.171	0.189
8	0.333	0.325	0.344	0.355	0.380
ОС	0.189	-0.006	0.148	0.230	0.411

Таким образом, результаты тестирования разработанной методики расчета нечетких рангов свидетельствуют об отсутствии эффекта интенсивного роста ширины итоговых нечетких интервалов. Наблюдается совершенно противоположный эффект сужения ширины интервалов, на первый взгляд, противоречащий исходным методологическим принципам оперирования с неопределенностями. Однако при более детальном анализе ситуации можно заметить, что в тех случаях, когда операции возведения в дробную степень и деления приводят к уменьшению обычных четких чисел, применение их к нечетким числам, построенным на базе исходных четких, уменьшает ширину результатов.

Можно заметить, что сама семантика слова «деление» подразумевает какое-то дробление или уменьшение. Интересно отметить, что операция вычитания в интервальной и нечетко-интервальной арифметике всегда приводит к росту ширины итоговых интервалов, что, впрочем, и не удивительно, если проанализировать ситуацию вычитания из положительного числа отрицательной величины.

Разработанные методики ранжирования частных критериев на основе четких и нечетко-интервальных матриц парных сравнений, а также возведения в нечеткие степени, реализованы на языке C++ и являются составной частью программного обеспечения, реализующего базовую методику формирования многокритериальных оценок качества функционирования сложных систем.

2.2.2. Проблема формирования обобщенного критерия

В постановке задач многокритериальной оптимизации центральное место занимают вопросы сравнения частных критериев и задания требований к возможным соотношениям их значений в точке оптимума, т.е. требований к оптимальности решения, на основании которых формируется глобальный критерий качества [24].

В [132] эти вопросы рассмотрены без учета различий между критериями и ограничениями, которые одинаковым образом участвуют в формировании глобального показателя качества в случае, если они описаны функциями желательности.

В рамках рассматриваемого подхода к описанию критериев вопросы их сравнения решаются просто и естественно, поскольку степень удовлетворения критерию в той или иной точке пространства возможных решений численно характеризуется значениями его функций желательности в этих точках. Если A и B – критерии, заданные своими функциями желательности $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, $x \in X$, то точка x_1 удовлетворяет критериям A и B в одинаковой степени, если $\mu_A(x_1) = \mu_B(x_1)$ и точка x_2 удовлетворяет критерию A в большей степени, чем критерию B , если $\mu_A(x_2) > \mu_B(x_2)$. Сформулированный способ сравнения частных критериев будем использовать в качестве основы формирования свертки критериев.

При формулировке задачи многокритериальной оптимизации в качестве требования к оптимальности решения в [132] вводится условие обязательного удовлетворения всем частным критериям и ограничениям, т.е. в точке оптимума все функции желательности должны быть отличными от нуля. Также требуется, чтобы в оптимуме критерии удовлетворялись в максимально возможной степени. Иными словами, полагается нежелательным, чтобы значение обобщенного критерия возрастало при улучшении ряда показателей качества за счет ухудшения остальных. В терминологии теории принятия решений последнее требование эквивалентно условию принадлежности точки оптимума множеству Парето [24].

Анализ способов формирования глобального показателя качества на основе сформулированных требований к оптимальности в [132] проводится, начиная с простейшего случая двух равнозначимых частных критериев. Для этого случая в [132] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2.1. Пусть на множестве X заданы равноценные частные критерии A и B , описываемые функциями желательности $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, $x \in X$, имеющими единственные максимумы в точках x_A и x_B соответственно. При этом выполняются соотношения:

$$\mu_A(x_A) > \mu_B(x_A), \quad \mu_B(x_B) > \mu_A(x_B). \quad (2.20)$$

Тогда в точке оптимума будет достигаться максимум функции

$$\mu_C(x) = \min (\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in X, \quad (2.21)$$

которую можно рассматривать как свертку частных критериев A и B , описывающую обобщенный критерий эффективности C .

В точке оптимума при этом реализуется максимум пересечения частных критериев.
Графическая иллюстрация теоремы представлена на рис. 2.22.

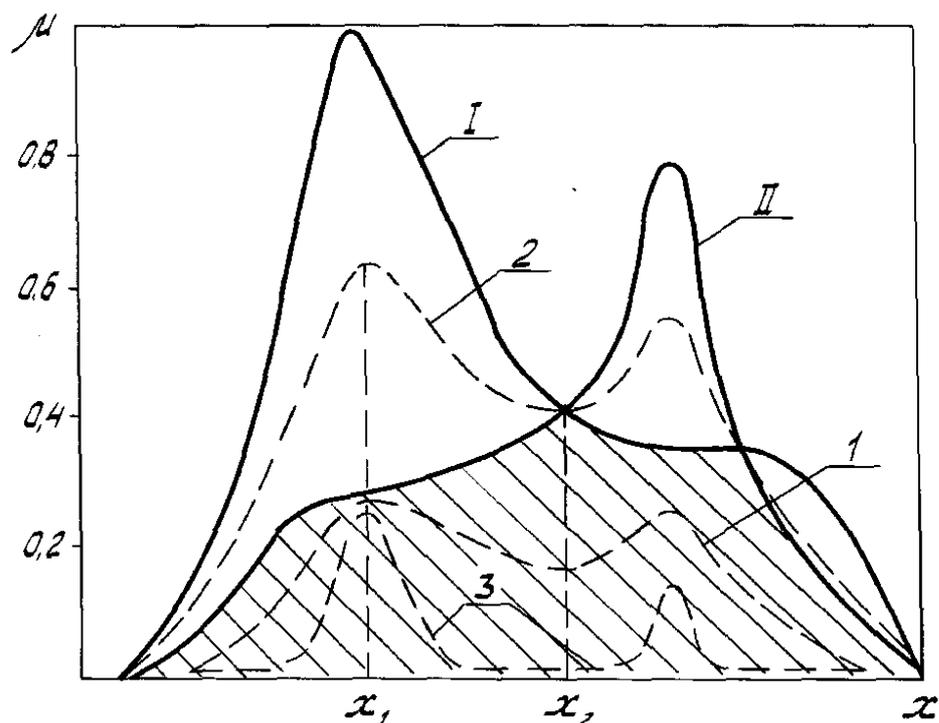


Рис. 2.22. Способы свертки равнозначимых частных критериев:

I - $\mu_A(x)$; II - $\mu_B(x)$; 1 - $\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$; 2 - $\mu_C(x) = 0.5\mu_A(x) + 0.5\mu_B(x)$;

3 - $\mu_C(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$; x_1 — точка оптимума для вариантов 1, 2, 3;

x_2 — точка оптимума для пересечения $\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

Как видно из рис. 2.22, даже широко распространенные аддитивная и мультипликативная свертки не позволяют получить оптимум, удовлетворяющий условиям теоремы 2.1.

Отметим, что по условиям теоремы 2.1 необходимо выполнение условий (2.20), но не требуется нормированности функции желательности. Нарушение требований (2.20) может привести к тому, что максимум функции $\mu_C(x)$ не будет достигаться ни в одной из точек пересечения кривых $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$. (рис. 2.23).

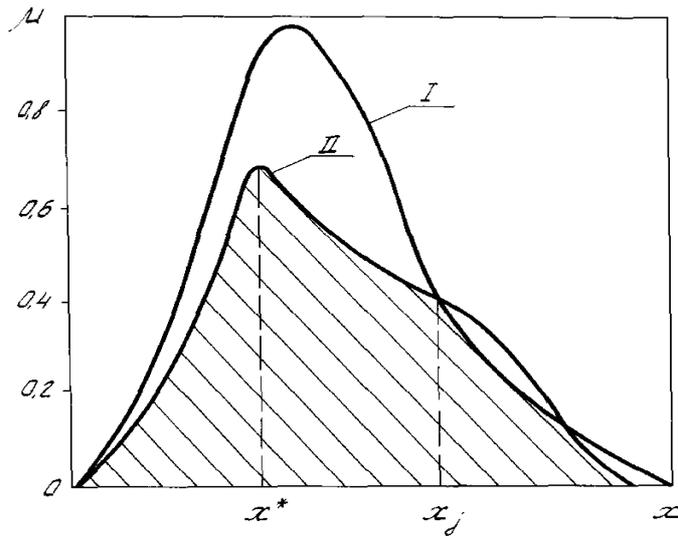


Рис. 2.23. Пересечение критериев и точки оптимума при нарушении условий (2.20):

I - $\mu_A(x)$; II - $\mu_B(x)$.

В этом случае в точке оптимума реализуется лишь требование максимального удовлетворения обоим критериям без соблюдения условия их равноценности в точке оптимума. Подобная ситуация является типичной для многих задач, где функции желательности, получаемые опосредованно, например, как $\mu(x) = \mu(f(x))$, могут вести себя немонотонно, иметь несколько максимумов.

Из доказанной в [132] теоремы 2.1 следует, что свертка частных критериев вида (2.21) обеспечивает при решении задачи удовлетворение всем сформированным требованиям к оптимальности решения. Следует отметить, что в рассматриваемом простейшем случае только свертка (2.21) обеспечивает получение оптимума, удовлетворяющего этим требованиям.

Рассмотрим еще одно важное свойство свертки вида (2.21). Если интерпретировать $\mu_C(x)$ как функцию принадлежности множеству $C = A \cap B$, образованному пересечением множеств A и B , и рассматривать оптимум как точку, обладающую наибольшей степенью принадлежности области пересечения частных критериев, то в этом случае единственным приемлемым способом задания пересечения множеств A и B следует опять признать свертку (2.21). Действительно, в предельном случае $A = B$ естественно потребовать $A \cap A = A$ или $\mu_C(x) = \mu_A(x)$, т.е. должен выполняться закон идемпотентности.

В этом случае ни аддитивный, ни мультипликативный, ни какой другой способ пересечения нечетких множеств, содержащий арифметические операции над функциями принадлежности, не обеспечивают идемпотентности. Важно отметить, что только свертка

типа (2.21) обеспечивает выполнение естественного соотношения $A \cap A = A$. При использовании сверток, содержащих арифметические операции сложения или умножения, имеет место неравенство $A \cap A \neq A$, которое невозможно разумно интерпретировать. Все это позволяет сделать вывод о целесообразности использования свертки (2.21) в качестве основы формирования обобщенного показателя качества на базе равноценных частных критериев.

В [132] рассмотрен также случай неравнозначимых критериев. Полагается, что неравнозначимым частным критериям A и B можно приписать коэффициенты относительной важности α_A и α_B . Показано, что распространенный аддитивный $\mu_C(x) = \alpha_A \mu_A(x) + \alpha_B \mu_B(x)$ и мультипликативный $\mu_C(x) = (\alpha_A \mu_A(x))(\alpha_B \mu_B(x))$ варианты формирования глобального критерия не могут обеспечить содержательно интерпретируемых результатов решения задачи оптимизации. Действительно, в предельном случае $\alpha_A = \alpha_B$ оба варианта могут обладать максимумами в точках, далеких от истинного оптимума (рис.2.22).

Свертка, предложенная в [348],

$$\mu_C(x) = \min(\alpha_A \mu_A(x), \alpha_B \mu_B(x)). \quad (2.22)$$

в асимптотическом пределе $\alpha_A = \alpha_B = 1$ переходит в оптимальный вариант свертки (2.21). На практике, однако, такой способ учета относительной важности критериев может привести к абсурдным результатам.

Положим, что критерии A и B удовлетворяют всем условиям теоремы 2.1, исключая условие равнозначимости. Пусть для определенности A важнее B , откуда следует естественное предположение $\alpha_A > \alpha_B$. Пусть далее x_0 – точка оптимума для случая, когда A и B равнозначимы, т.е. точка оптимума, максимизирующая $\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ и пусть x_0' – точка оптимума для неравнозначимых A и B , максимизирующая $\mu_C'(x) = \min(\mu_A'(x), \mu_B'(x)) = \min(\alpha_A \mu_A(x), \alpha_B \mu_B(x))$. Тогда x_0' является одним из решений уравнения

$$\alpha_A \mu_A(x) = \alpha_B \mu_B(x),$$

которое можно представить в виде:

$$\beta \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \beta = \alpha_A / \alpha_B > 1. \quad (2.23)$$

Не ограничивая общности рассуждений, положим, что $x_A < x_B$, где x_A, x_B – точки единственных максимумов $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$. Тогда, сопоставляя условия $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ в точках оптимума, а также, учитывая монотонное убывание $\mu_A(x)$ и возрастание $\mu_B(x)$ на отрезке $[x_A, x_B]$, сделаем вывод, что $x_0' > x_0$. Отсюда следует, что $\mu_A(x_0') < \mu_B(x_0')$, т.е. критерий A удовлетворяется в меньшей степени, чем B , что противоречит исходной посылке о предпочтительности критерия A . Проведенное доказательство иллюстрирует рис. 2.24.

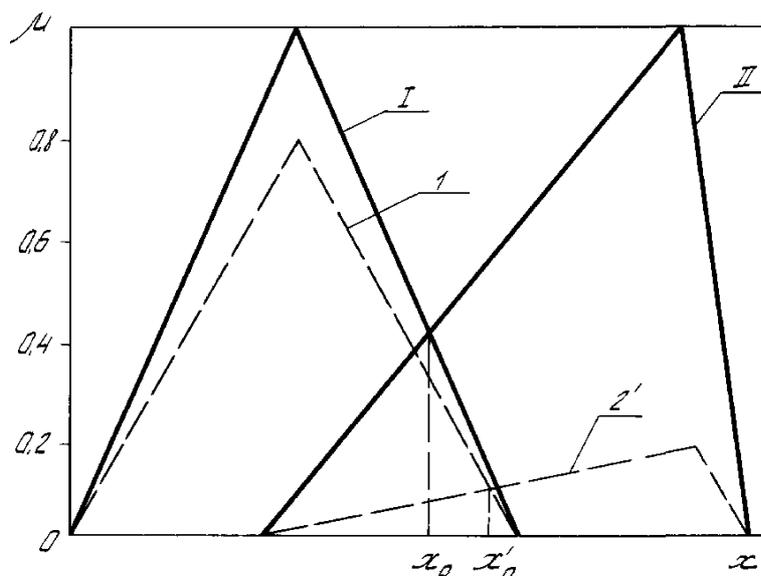


Рис.2.24. Свертка ранжированных критериев по формуле $\mu_C(x) = \min(\mu_A'(x), \mu_B'(x))$:

I - $\mu_A(x)$; II - $\mu_B(x)$; 1 - $\mu_A'(x) = 0.8\mu_A(x)$; 2 - $\mu_B'(x) = 0.2\mu_B(x)$.

Очевидно, что для получения качественно верного результата с помощью свертки типа (2.22) более значимый критерий следует умножить на меньший ранг, однако это находится в противоречии с интуитивными представлениями о ранжировке критериев и затрудняет постановку задачи оптимизации в случаях большого числа критериев. Другим недостатком свертки типа (2.22) является ненормированность функции $\mu_C(x)$, что не дает возможности оценить близость локального оптимума к глобальному при наличии многих экстремумов $\mu_C(x)$.

С учетом изложенного, естественным обобщением (2.21) на случай неравнозначимых критериев, наиболее полно отражающим качественный характер задания предпочтений при формировании обобщенного показателя качества, представляется свертка, предложенная в [326]:

$$\mu'_C(x) = \min(\mu_A^{\alpha_A}(x), \mu_B^{\alpha_B}(x)), \quad (2.24)$$

где $(\alpha_A + \alpha_B)/2 = 1$.

Ясно, что в предельном случае равнозначимых критериев, т.е. при $\alpha_A = \alpha_B = 1$, свертка (2.24) эквивалентна (2.21).

Положим для определенности, что критерий A важнее B , т.е. $\alpha_A > \alpha_B$. В [326] показано, что в этом случае к удовлетворению критерию A предъявляются более жесткие требования, чем к удовлетворению критерию B . При этом максимальные значения глобального критерия будут находиться в точке, более близкой к максимуму $\mu_A(x)$, чем к максимуму $\mu_B(x)$ и, если x_0 – точка максимума $\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$, а x_0' – точка максимума $\mu_C'(x)$, то $\mu_A(x_0') > \mu_B(x_0)$.

Выражение (2.24) естественным образом обобщается на случай n критериев

$$\mu'_C(x) = \mu_1^{\alpha_1}(x) \wedge \mu_2^{\alpha_2}(x) \wedge \dots \wedge \mu_n^{\alpha_n}(x), \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad (2.25)$$

где \wedge - операция взятия минимума; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – коэффициенты относительной важности критериев, которые можно найти, например, по методике [221] с использованием матрицы парных сравнений. Отметим, что важным свойством свертки (2.25) является сохранение нормировки $\mu_C'(x)$ на единицу, если все μ_1, \dots, μ_n также нормированы.

Проведенный анализ подтверждает предпочтительность максиминной стратегии отыскания оптимума при описании частных критериев функциями желательности. Как указывается в [25], максиминный подход обеспечивает гарантированный результат. Применительно к исследуемой проблеме это означает, что степени удовлетворения частным критериям в точке оптимума не ниже степени удовлетворения наименее значимому критерию, и решение оптимально по Парето. Однако на практике условия доказанной в [132] теоремы 2.1 выполняются далеко не всегда, и часто имеет место ситуация, аналогичная представленной на рис. 2.25.

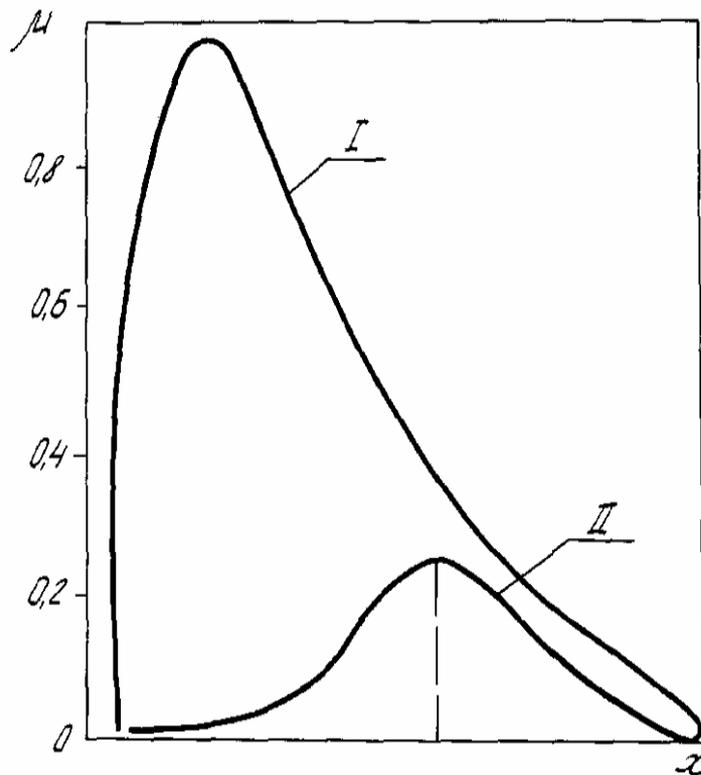


Рис. 2.25. Непересекающиеся функции желательности критериев: I - $\mu_A(x)$; II - $\mu_B(x)$

Очевидно, что при использовании свертки типа (2.21) оптимум в этом примере будет достигаться в точке, которую вряд ли на содержательном уровне можно признать удовлетворительным решением, особенно, если критерий A более важен, чем B . В подобных случаях максиминная стратегия, не допускающая компенсации низких значений одного критерия за счет другого, недостаточно полно отражает качественные представления о вкладе частных критериев в глобальный показатель качества.

Следует подчеркнуть, что теорема 2.1 доказана лишь для случая двух частных критериев. Совершенно иные ситуации могут иметь место уже при наличии трех частных критериев $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, $\mu_C(x)$ (рис. 2.26). На рис. 2.26 приведен пример случая равноважных частных критериев, когда трудно утверждать, что в точке x_2 достигается оптимум или, что x_2 является наилучшей среди непрерывного множества альтернатив $x \in X$, поскольку в Парето области отсутствует точка, в которой пересекались бы одновременно все три функции желательности.

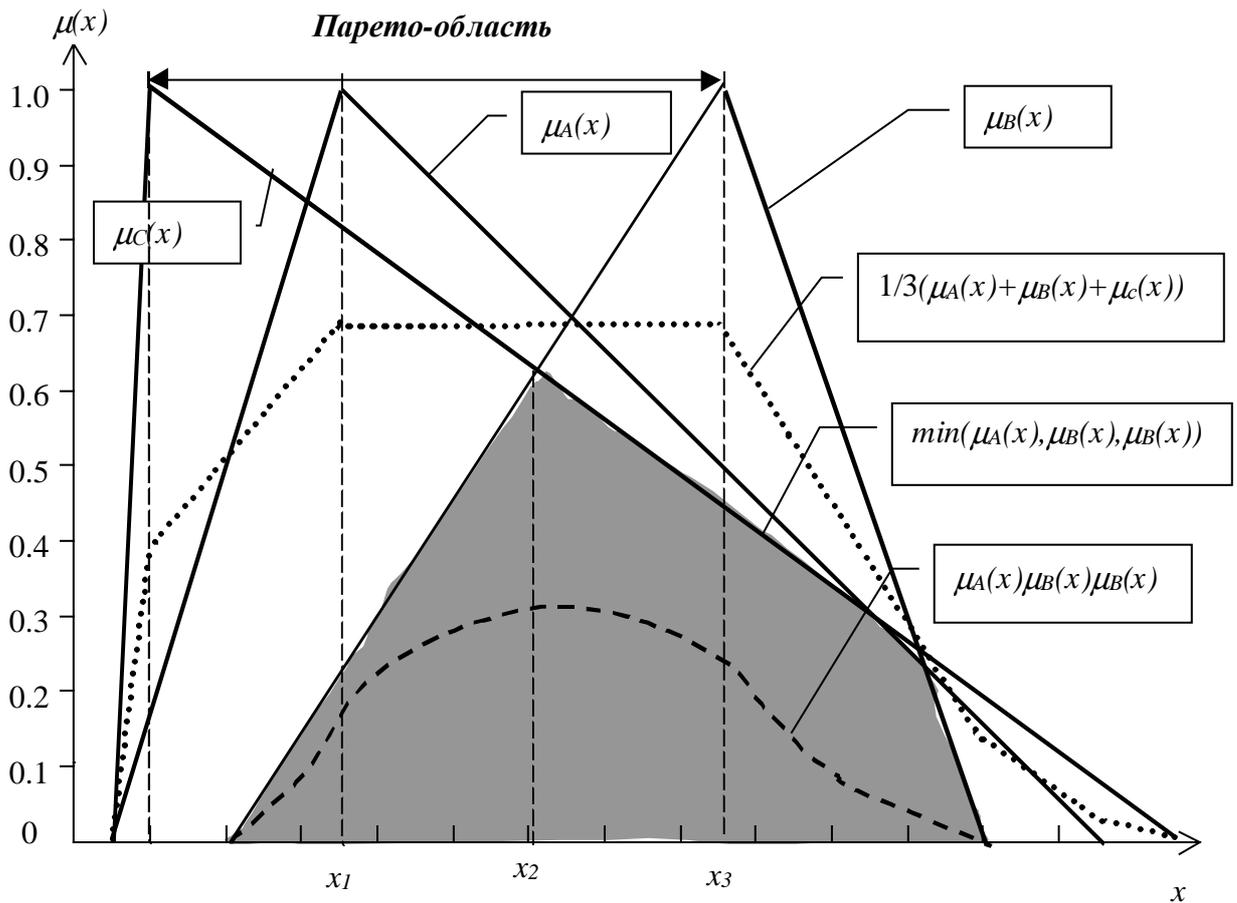


Рис. 2.26. Варианты агрегирования трех частных критериев

Все это, свидетельствует о том, что при решении задач оптимизации или выбора альтернатив, целесообразно сопоставлять результаты, полученные с помощью разных способов агрегирования частных критериев. При этом с наибольшей осторожностью следует использовать аддитивные свертки.

На рис. 2.27 графически представлена ситуация, когда аддитивная свертка даже для двухкритериальной задачи не позволяет выявить каких либо предпочтений в Парето-области.

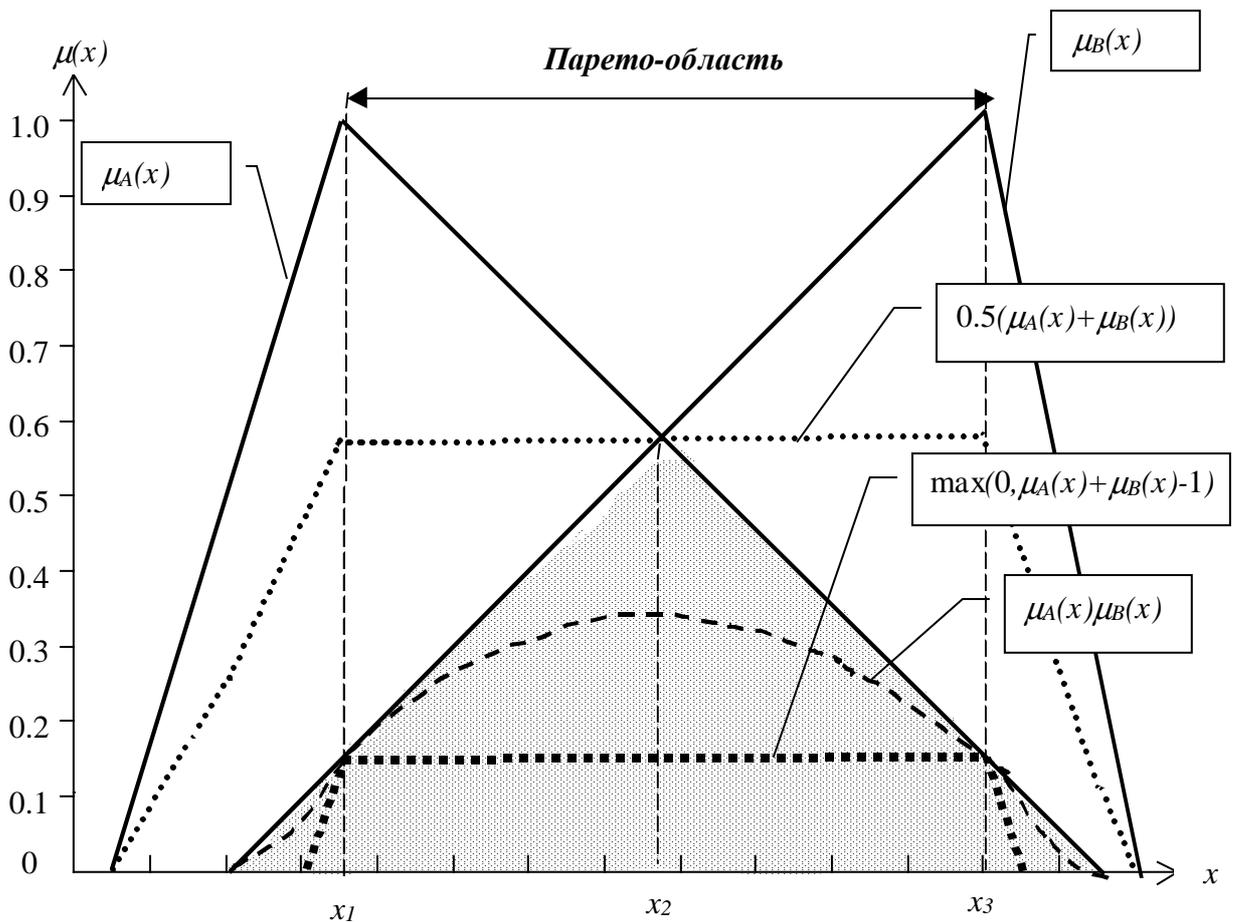


Рис. 2.27. Варианты агрегирования двух частных критериев

Известно, что во многих случаях максиминный подход просто не отвечает интуитивным представлениям лиц, принимающих решения об оптимальности [193]. Поэтому при решении сложных задач с большим набором частных критериев и ограничений после получения гарантированной оценки оптимума при максиминной стратегии имеет смысл провести решение и для других вариантов формирования глобального критерия, например, аддитивного или мультипликативного. Сопоставляя значения частных критериев в полученных точках оптимума можно выбрать наиболее приемлемое решение.

В связи этим весьма актуальными являются вопросы агрегирования самих обобщенных критериев [285]. Так, в [193] для этого используются элементы теории возможностей, в [328] предлагается операция так называемого взвешенного усреднения, в [220] развивается подход на основе t -норм Егера, в [198, 261] - метод иерархического агрегирования. Широко используется в настоящее время свертка с помощью μ -оператора [345, 346]:

$$\eta = \left(\prod_i \mu_i \right)^{1-\gamma} \left(1 - \prod_i (1 - \mu_i) \right)^\gamma, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad (2.26)$$

где μ_i – функции желательности частных критериев качества.

Видно, что выражение (2.26) представляет собой свертку лишь аддитивного и мультипликативного обобщенных критериев. В [262] предложены аналогичные γ -свертки критериев на основе минимума, максимума и аддитивного критерия:

$$\eta_{or} = \gamma \max_i(\mu_i) + (1 - \gamma) \left(\sum_i \mu_i \right) / n, \quad (2.27)$$

$$\eta_{and} = \gamma \min_i(\mu_i) + (1 - \gamma) \left(\sum_i \mu_i \right) / n \quad (2.28)$$

Выражения (2.27), (2.28) использовались при решении задач многоуровневого принятия решений [300]. При этом в качестве одной из основных проблем отмечается отсутствие строгих правил выбора параметра γ

В работе [181] предложен метод, в определенной степени формализующий выбор γ . Однако он требует получения от эксперта значительного объема дополнительной информации, причем количественного характера. Дополнительно следует отметить, что в (2.26)-(2.28) частные критерии полагаются равноценными. Ясно, что их ранжировка с помощью, например, метода парных сравнений, представляется более сложной и ответственной задачей, чем выбор параметра γ . Кроме того, рассмотренные подходы не позволяют агрегировать одновременно все три основные типы свертки частных критериев на основе оператора *min*, аддитивного и мультипликативного.

Во многих случаях может оказаться полезной следующая процедура отыскания компромиссного решения [132]. Пусть $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ – некоторые варианты свертки частных критериев, например, максиминный, аддитивный и мультипликативный. Допустим, что в результате максимизации каждой из функций μ_1 , μ_2 и μ_3 получены точки оптимума x_1 , x_2 и x_3 , соответственно. В результате исследования значений частных критериев в точках x_1 , x_2 и x_3 у лица, принимающего решение, формируются предпочтения, которые можно охарактеризовать ранжировкой x_1 , x_2 и x_3 с точки зрения их удовлетворения требованиям оптимальности. Пусть эта ранжировка задана некоторыми коэффициентами относительной

важности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (которые могут быть и равными друг другу, когда ранжировка x_1, x_2 и x_3 затруднительна). Тогда, вводя нормированные на единицу функции $\bar{\mu}_1(x) = \mu_1(x) / \mu_1(x_1)$; $\bar{\mu}_2(x) = \mu_2(x) / \mu_2(x_2)$; $\bar{\mu}_3(x) = \mu_3(x) / \mu_3(x_3)$, можно сформировать новый глобальный критерий, который назовем обобщенным компромиссным показателем качества

$$\eta(x) = \min\left(\bar{\mu}_1^{\alpha_1}(x), \bar{\mu}_2^{\alpha_2}(x), \bar{\mu}_3^{\alpha_3}(x)\right) \quad (2.29)$$

Точка глобального максимума критерия $\eta(x)$ будет представлять собой некоторое компромиссное решение задачи оптимизации, учитывающее возможности достижения оптимальных условий с помощью различных способов формирования глобального критерия.

2.2.3. Построение иерархических систем обобщенных критериев

Одним из наиболее часто используемым в задачах анализа многокритериальных иерархических систем является разработанный американским ученым Т. Саати метод анализа иерархий (МАИ) [116, 209, 289, 288], заключающийся в иерархическом представлении элементов, определяющих суть решаемой проблемы.

Следует отметить, что в США МАИ фактически является стандартом. Метод состоит в декомпозиции проблемы на более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений лица, принимающего решение, с помощью матриц парных сравнений. В результате работы с матрицами рассчитываются относительные степени взаимодействия элементов в иерархии, и выбирается наилучшая с точки зрения цели альтернатива.

Проиллюстрируем сущность метода на примере рассмотренного выше примера оценки дома. Семья среднего достатка решила купить дом. Сформулируем задачу о выборе одного из трех домов-кандидатов. Представим структурно задачу в иерархической форме следующим образом (рис. 2.28).

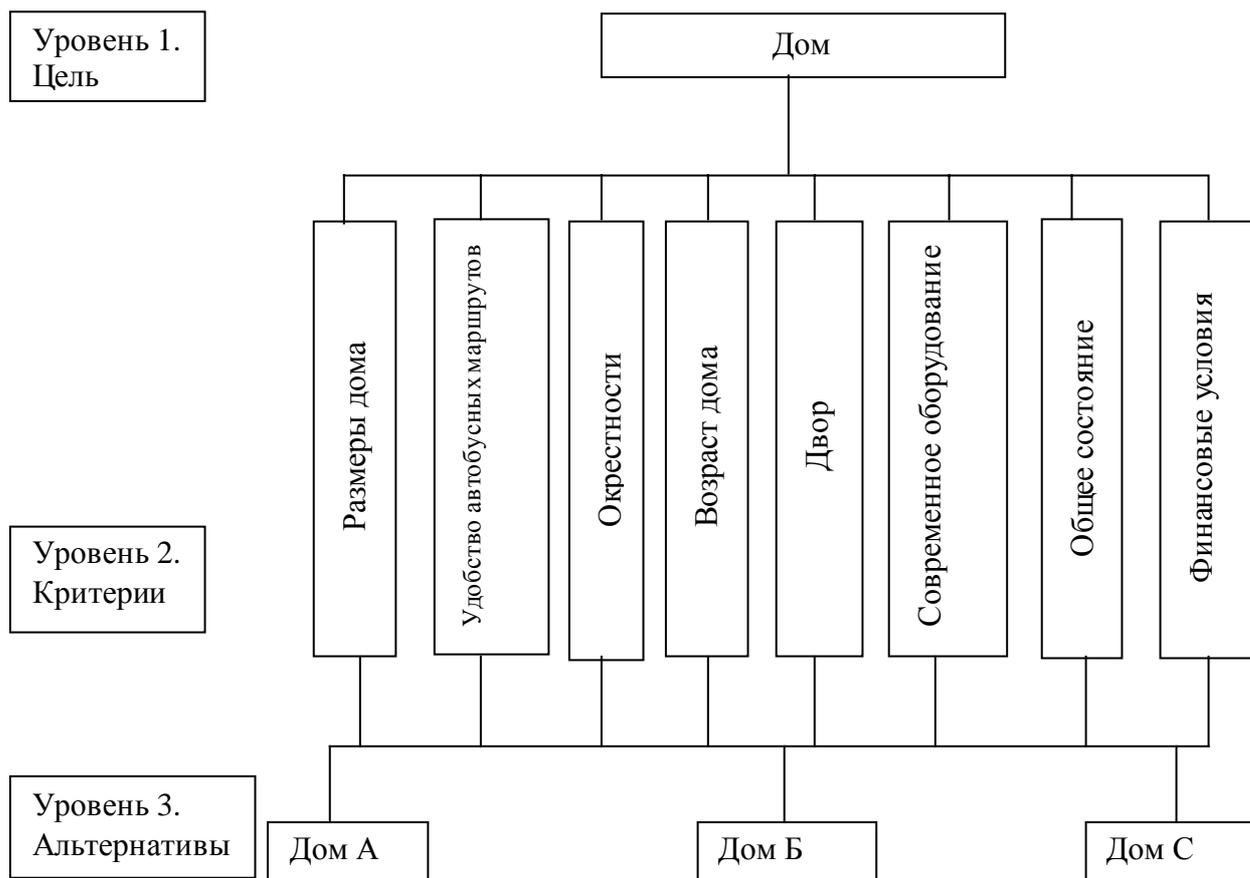


Рис.2.28. Декомпозиция задачи в иерархию

На первом (высшем) уровне находится общая цель — «Дом». На втором уровне находятся восемь факторов или критериев, уточняющих цель, и на третьем (нижнем) уровне находятся три альтернативы – дома *А*, *Б*, *В*, которые должны быть оценены сначала по критериям второго уровня, а потом с точки зрения общей цели.

В соответствии с МАИ, построим множество матриц парных сравнений для каждого из нижних уровней - по одной матрице для каждого критерия верхнего уровня. При этом элементы нижнего уровня сравниваются друг с другом с точки зрения удовлетворения критерию на верхнем уровне. Таким образом, получается набор квадратных матриц суждений. Парные сравнения проводятся в терминах доминирования одного из элементов над другим.

В данном примере должно быть построено девять матриц - одна для второго уровня иерархии и восемь - для третьего уровня. Выше, в параграфе 2.2.1, уже была представлена (табл. 2.2) заполненная матрица для элементов 2-го уровня по критерию 3-го уровня, т.е.

относительно цели. Восемь матриц парных сравнений для третьего уровня иерархии, т.е. для альтернатив, по отношению к элементам 2-го уровня, содержат попарное сравнение возможных вариантов выбора дома. Сравнивается, насколько более желателен или хорош тот или иной дом с точки зрения удовлетворения каждому критерию второго уровня. Получаем восемь матриц суждений размерностью 3×3 , поскольку имеется восемь критериев на втором уровне и три дома, которые попарно сравниваются по каждому из критериев.

На следующем этапе МАИ из каждой матрицы парных сравнений формируется набор локальных приоритетов или рангов $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, которые выражают относительное влияние множества элементов нижнего уровня на соответствующие элементы примыкающего сверху уровня.

Рассмотрим методику в обобщенной форме.

Приоритеты синтезируются, начиная со второго уровня вниз. Локальные приоритеты $\alpha_{k,i,j}$ (индекс k – номер уровня, i – номер элемента на k -ом уровне, j – номер элемента на $(k+1)$ -ом уровне) перемножаются на приоритет соответствующего критерия на вышестоящем, $(k+1)$ -ом уровне и суммируются по каждому элементу. Иными словами, рассчитывается глобальный приоритет для каждого элемента иерархии по аддитивному принципу:

$$\alpha_{k,i} = \sum_{j=1}^J \alpha_{k,i,j} \alpha_{k+1,j}, \quad k = 1, \dots, K - 1; i = 1, \dots, N; \quad (2.30)$$

где K – количество уровней в иерархии; I – количество элементов на k -ом уровне; J – количество элементов $(k+1)$ -ого уровня, выступающих в качестве критериев для I элементов k -ого уровня.

Полученный из выражения (2.30) глобальный приоритет элемента затем используется для взвешивания локальных приоритетов элементов, сравниваемых по отношению к нему, как к критерию, и расположенных уровнем ниже. Процедура продолжается до самого нижнего уровня, который представляет собой вектор альтернатив. Теперь, имея вектор глобальных приоритетов для альтернатив, можно принять окончательное решение.

Рассмотренный метод анализа иерархий получил широкое распространение и применяется для решения широкого круга проблем, включая перспективное планирование, оценку качества решений. Возможности метода не ограничиваются анализом ситуации на уровне отдельного предприятия, существуют примеры его применения для решения проблем в масштабе целых стран. В то же время МАИ присущи и существенные недостатки:

1. При изменении количества альтернатив необходимым является построение всех матриц для уровня альтернатив заново. При этом, к сожалению, невозможно использовать ранее полученную информацию, и это, в свою очередь, заставляет также делать полный перерасчет всех критериев для выбора альтернативы. В случае необходимости работать с большой и быстро изменяющейся совокупностью альтернатив этот недостаток МАИ может стать критическим.

2. При использовании МАИ первоначальная информация об альтернативах, независимо от того, качественного или количественного характера она была, при построении матриц парных сравнений преобразовывается в качественную, выражающую сравнительную оценку одной альтернативы относительно другой. При этом происходит потеря количественной информации, которая может привести к неприемлемым результатам. Например, рассмотрим случай, когда один дом стоит \$100 тыс., а другой \$10 млн. Тогда в матрице парных сравнений относительно критерия стоимости должна будет стоять цифра 9, отражающая сильное преимущество первого дома относительно второго с точки зрения цены. Далее может оказаться, что остальные показатели (кроме цены) у второго дома более привлекательны (на практике так обычно и получается, поскольку дом стоимостью \$10 млн. должен быть по всем показателям, кроме цены, лучше дома за \$100 тыс.). В этом случае, в соответствии с МАИ, второй дом окажется предпочтительнее с точки зрения глобального критерия. В то же время стоимость дома в \$10 млн. для семьи среднего достатка является не только менее предпочтительной, а в целом невозможной.

Синтез теории нечетких множеств, описанных выше методов ранжирования и агрегирования частных критериев позволил построить методику нечеткой многокритериальной оценки альтернатив, свободную от недостатков метода Т.Саати [125].

В основу формальных определений положим рассмотрение процедуры использования разработанной методики для формирования обобщенного критерия качества сложной системы на одном из уровней иерархии.

Положим, что для N_1 частных критериев качества сложной системы применены количественные оценки и остальные $N - N_1$ частных критериев оценены на качественном (вербальном) уровне.

Для описания частных критериев на основе количественных параметров используем одну из типичных форм функций желательности, представленных на рис. 2.6. Например, для критерия «затраты на эксплуатацию сложной системы», можно использовать функцию желательности, представленную на рисунке 2.29.

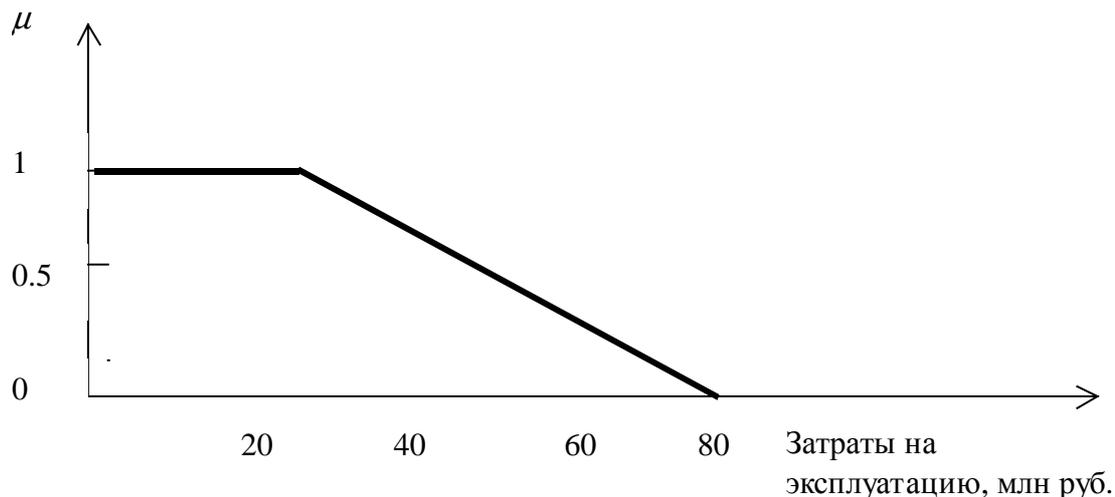


Рис. 2.29. Функция желательности критерия «затраты на эксплуатацию сложной системы»

Для математической формализации критериев на основе параметров, задаваемых на качественном уровне, будем использовать функции желательности, аналогичные представленной на рисунке 2.7. Функцию желательности критерия «техническое состояние сложной системы» можно охарактеризовать зависимостью, представленной на рисунке 2.30.

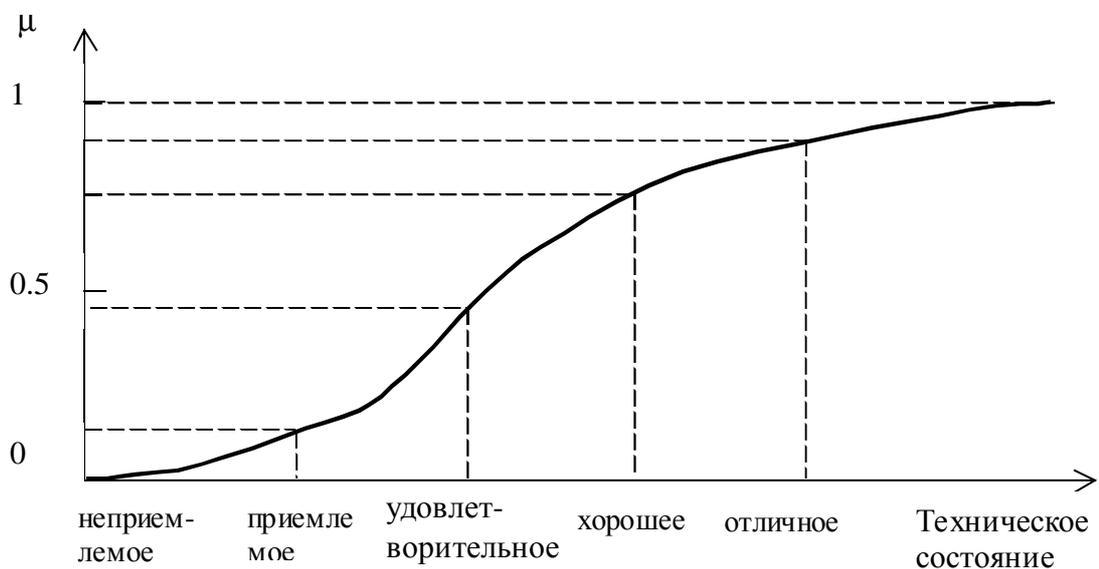


Рис. 2.30. Функция желательности критерия «техническое состояние сложной системы».

После формализации остальных частных критериев получим функции желательности μ_1, \dots, μ_N , характеризующие совокупность частных параметров качества системы.

Далее вычислим коэффициенты относительной значимости (ранги) $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ сформированных частных критериев. Для их нахождения воспользуемся изложенной в п.п. 2.2.1 методикой ранжирования на основе матрицы парных сравнений частных критериев.

Подставляя количественные или качественные значения параметров, характеризующих конкретные состояния системы, в функции желательности, получим численные значения частных критериев. Далее, используя один из способов формирования обобщенного критерия – аддитивный, мультипликативный, максиминный или какой-либо другой, получаем окончательные агрегированные оценки качества для каждой из сравниваемых сложных систем. Вследствие свойств функций желательности количественные оценки всех критериев находятся в интервале $[0,1]$. Это значительно облегчает анализ и принятие решений на основе полученных результатов.

Предложенная методика опирается на явную количественную формулировку критериев качества на основе функций желательности значений параметров качества. При этом обеспечивается полное использование в оценках исходной количественной информации и расширяется информативность постановки задачи за счет рассмотрения степени желательности количественных или качественных значений используемых параметров.

В рамках разработанной методики, в отличие от известных [116], появление новой альтернативы не изменяет матриц парных сравнений и оценок уже проанализированных альтернатив, а требует лишь расчета обобщенного критерия качества для вновь введенной альтернативы.

Отметим также, что предложенная методика позволяет оперировать с нечеткими матрицами парных сравнений и функциями желательности, что значительно расширяет возможности адекватного математического описания неопределенностей различной природы.

Разработанная методика позволяет естественным образом строить разветвленные иерархические структуры, обобщенная схема которых представлена на рисунке 2.31. Каждый критерий верхнего k -го уровня строится на основе локальных критериев нижележащего $(k-1)$ -го уровня с помощью одного из способов их агрегирования. Общее выражение для расчета критериев на промежуточных уровнях иерархии имеет вид:

$$D_{k,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k} = f_{k,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k} (D_{k-1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k,1}, \alpha_{k-1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k,1}, \dots, D_{k-1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k,m_{k,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k}}, \alpha_{k-1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k,m_{k,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k}}), \quad (2.31)$$

где $f_{k,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k}$ имеет смысл оператора агрегирования критериев, $m_{k,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k}$ — количество локальных критериев $(k-1)$ -го уровня, входящих в состав локального критерия k -го уровня $D_{k,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_k}$.

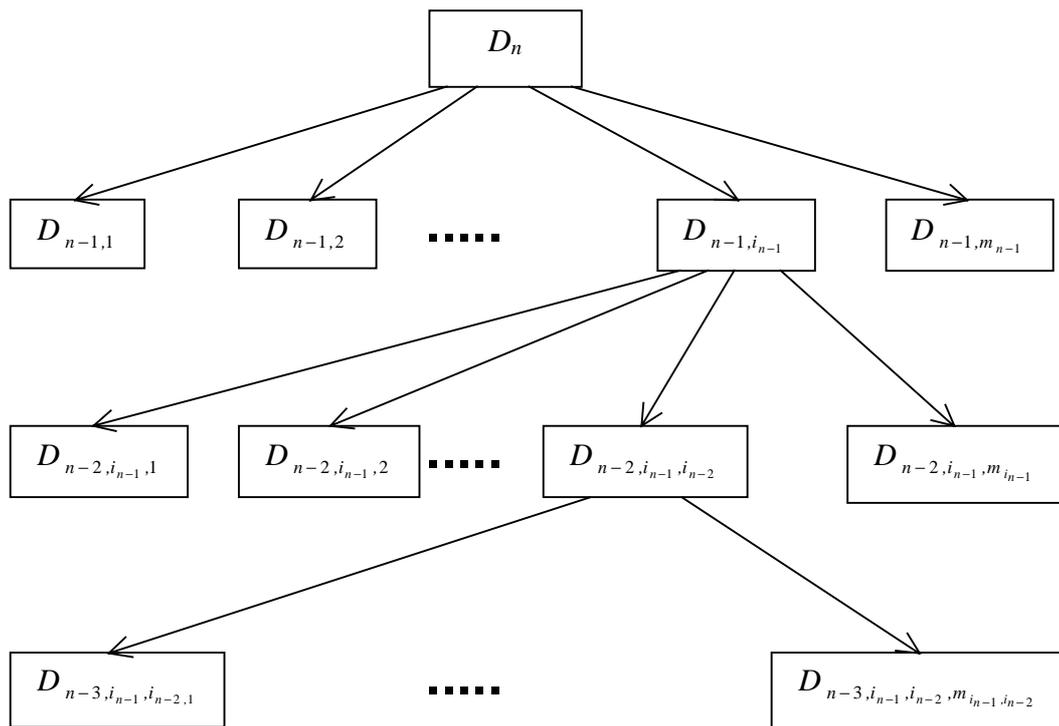


Рис. 2.31. Обобщенная схема построения иерархической структуры

В соответствии с применяемым подходом численные значения $D_{n-1,i_{n-1}}$ всегда находятся в пределах от 0 до 1 и могут быть интерпретированы как значения некоторых промежуточных частных критериев. На самом нижнем уровне иерархии используются непосредственно функции желательности исходных частных критериев, определяемых базовыми параметрами качества:

$$D_{1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1} = f_{1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1} (\mu_{0,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1,1}, \alpha_{0,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1,1}, \dots, \mu_{0,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1,m_{1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1}}, \alpha_{0,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1,m_{1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1}}), \quad (2.32)$$

где $m_{1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1}$ – количество частных критериев, входящих в состав локального критерия 1-го уровня $D_{1,i_{n-1},i_{n-2},\dots,i_1}$.

Структура программного обеспечения, реализующего описанную методику, представлена на рис. 2.32.



Рис. 2.32. Укрупненная структура программной реализации «базовой» методики многокритериальной иерархической оценки качества

Рассмотрим простой пример оценки уровня социально-экономического развития отдельного района. При принятии управленческих решений руководство области должно иметь численную характеристику качества функционирования каждого из районов, входящих в состав области, позволяющую сравнивать районы между собой. Согласно схеме на рис. 2.31, глобальный критерий качества функционирования района имеет обозначение D_n . В рассматриваемом примере число уровней $n = 3$. Для расчета D_3 многообразие учитываемых параметров можно разделить на блоки, качество функционирования которых описывают локальные критерии: промышленность (D_{21}), сельскохозяйственное производство (D_{22}), финансы (D_{23}), социально-демографический (D_{24}) и медико-экологический (D_{25}). Глобальный критерий D_3 рассчитывается с использованием одного из методов агрегирования частных критериев с учетом рангов нижележащих локальных критериев: промышленности - α_{21} , сельского хозяйства - α_{22} , финансов - α_{23} и т.д.

Локальный критерий (D_{22}) «Сельское хозяйство» строится на основе следующих локальных критериев 1-го уровня и их рангов:

- Растениеводство- (D_{121}, α_{121}).
- Животноводство - (D_{122}, α_{122}).

Расчет локальных критериев 1-го уровня строится на основе значений функций желательности частных критериев и их рангов по формуле (2.30).

Локальный критерий (D_{121}) «Растениеводство» строится на основе следующих частных критериев и их рангов:

- Урожайность зерна по отношению к предыдущему периоду - ($\mu_{0211}, \alpha_{02111}$).
- Урожайность зерна - ($\mu_{0212}, \alpha_{0212}$).
- Урожайность картофеля по отношению к предыдущему периоду - ($\mu_{0213}, \alpha_{0213}$).
- Урожайность картофеля - ($\mu_{0214}, \alpha_{0214}$).
- Процент выполнения прогноза по закупкам зерна - ($\mu_{0215}, \alpha_{0215}$).
- И т.д.

Локальный критерий (D_{122}) «Животноводство» строится на основе следующих частных критериев и их рангов:

- поголовье коров по отношению к предыдущему периоду - ($\mu_{0221}, \alpha_{0221}$).
- поголовье свиней по отношению к предыдущему периоду - ($\mu_{0222}, \alpha_{0222}$).
- Заготовка кормов на условную голову - ($\mu_{0223}, \alpha_{0223}$).
- Удой молока на корову - ($\mu_{0224}, \alpha_{0224}$).
- Процент выполнения прогноза по закупкам яиц - ($\mu_{0225}, \alpha_{0225}$).

- И т.д.

Локальный критерий «Промышленность» (D_{21}) не имеет локальных критериев 1-го уровня. Поэтому он строится сразу по формуле (2.30) на основе следующих четырех частных критериев и их рангов:

- Темпы роста объемов производства - $(\mu_{011}, \alpha_{011})$.
- Темпы роста товаров народного потребления - $(\mu_{012}, \alpha_{012})$.
- Удельный вес реализованной продукции - $(\mu_{013}, \alpha_{013})$.
- Темпы роста численности производственно-промышленного персонала - $(\mu_{014}, \alpha_{014})$.

Темпы роста производительности труда - $(\mu_{015}, \alpha_{015})$.

Полученная иерархическая структура глобального критерия, характеризующего качество функционирования района, приведена на рисунке 2.33.

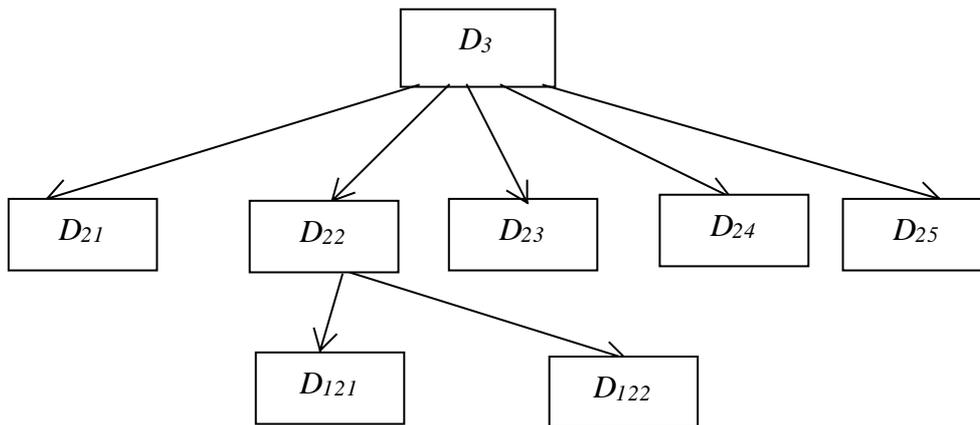


Рис. 2.33. Иерархическая структура глобального критерия, характеризующего качество функционирования района

§ 2.3. Многокритериальная оптимизация

2.3.1. Постановка задач многокритериальной оптимизации в условиях нестатистической неопределенности

Если при рассмотрении конкретной проблемы решены все вопросы, связанные с формализацией и ранжировкой частных критериев, а также выбран способ построения глобального критерия, то задача оптимизации может быть в принципе решена одним из методов поиска экстремума глобального критерия в пространстве нескольких переменных.

Обычно при этом возникают новые проблемы, связанные с возможным наличием нескольких локальных оптимумов, различной чувствительностью глобального критерия к варьируемым факторам, статистической ненадежностью найденного оптимума и т.д. Решение этих вопросов в рамках разработанной в [132] методики основано на применении элементов теории нечетких множеств и теории возможностей.

Первым этапом оценки качества решения в найденной точке локального или глобального оптимума является анализ чувствительности. Он проводится в следующих целях:

1. Отыскиваются входные переменные, наиболее сильно влияющие на оптимальное решение, к точности задания которых следует предъявлять наиболее жесткие требования.
2. Определяется влияние на систему в окрестности оптимума неточно заданных параметров, значения которых зачастую известны со значительной погрешностью.
3. Выявляется возможная реакция системы на неуправляющие внешние воздействия.

Информация такого рода очень важна для практической реализации оптимальных решений, и детальный анализ чувствительности во многих случаях может оказаться даже полезнее, чем отыскание самого оптимального решения [164].

Нахождение оптимального решения и дальнейший анализ чувствительности требуют многократного обращения к модели. При использовании полных достаточно сложных имитационных моделей последнее может привести к недопустимо большим затратам машинного времени. В таких ситуациях целесообразно использовать различные варианты двухэтапных методов моделирования [112, 169]. Их основная идея заключается в получении с помощью исходной модели поверхности отклика, для которой решается оптимизационная задача. После отыскания такой приближенной оценки область поиска в окрестности оптимума сужается, поверхность отклика уточняется, и процесс повторяется до тех пор, пока разность между двумя последовательными решениями не станет достаточно малой. Поверхность отклика представляет собой регрессионный полином, связывающий значения обобщенного показателя качества с входными переменными, получаемый одним из методов планирования эксперимента.

Основной недостаток этих методов заключается в необходимости повторения дорогостоящей процедуры численных экспериментов всякий раз заново при изменении ранжировки или состава частных критериев, способа формирования глобального критерия. Более экономична методика, основанная на использовании численного эксперимента для редукции исходной имитационной модели. Полученные при этом уравнения регрессии могут связывать выходные переменные модели \vec{Y} не только с входными \vec{X} , но и с

неопределенными параметрами модели $\vec{\theta}$ (в этом случае при проведении численных экспериментов компоненты вектора $\vec{\theta}$ варьируются аналогично компонентам \vec{X}). Использование современных методик обработки данных при возможности проведения достаточного количества численных экспериментов позволяет получить совокупность регрессионных полиномов, описывающих процесс практически с той же точностью, что и исходная модель процесса. Итоговая регрессионная модель будет требовать на несколько порядков меньших затрат машинного времени, чем исходная, поэтому ее можно использовать не только в двухэтапных, но и в прямых методах поиска оптимума.

Обобщенный критерий качества для процесса, характеризующегося совокупностью из N критериев и ограничений, зависящих от K выходных и L входных контролируемых переменных в соответствии с операцией многокритериального свертывания (2.25) можно представить в виде:

$$D(\vec{Y}(\vec{X}), \vec{X}) = \mu_1^{\alpha_1}(y_1(\vec{X})) \wedge \mu_2^{\alpha_2}(y_2(\vec{X})) \wedge \mu_k^{\alpha_k}(y_k(\vec{X})) \wedge \mu_{k+1}^{\alpha_{k+1}}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_N^{\alpha_N}(x_L), \quad (2.33)$$

где y_1, \dots, y_k и x_1, \dots, x_L – компоненты векторов \vec{Y} и \vec{X} , определяющие критерии качества и ограничения, μ_1, \dots, μ_N – функции желательности, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – ранги частных критериев.

2.3.2. Многоэкстремальность и проблема устойчивости оптимума

Функция $D(\vec{X}) = D(\vec{Y}(\vec{X}), \vec{X})$ в пространстве допустимых значений \vec{X} может иметь несколько точек локальных максимумов \vec{X}_i ($i = 1, \dots, M$), характеризующихся своими значениями обобщенного показателя качества $D_{0i}(\vec{X}_i)$. В общем случае многоэкстремальность является очень распространенным свойством задач оптимизации [112]. Естественному, на первый взгляд, стремлению получить глобальный максимум, обладающий наибольшим значением $D(\vec{X})$, на практике противодействуют два обстоятельства.

Во-первых, в настоящее время отсутствуют общие конструктивные методы, гарантирующие получение глобального экстремума. Отметим, что использование свертки типа (2.33) обладает тем достоинством, что известна верхняя граница значений $D(\vec{X})$, равная 1, поэтому всегда можно оценить насколько близок локальный экстремум к наилучшему среди множества возможных локальных экстремумов. Во-вторых, значение $D(\vec{X})$ в точке глобального оптимума может оказаться неустойчивым. В примере,

приведенном на рис. 2.34, погрешность установки значений \bar{X} в окрестности глобального максимума для реальных технологических условий перекрывает область больших значений $D(\bar{X})$. Ясно, что локальный экстремум в точке \bar{X}_1 в данном случае предпочтительнее.

При использовании двухэтапных методов оптимизации очень полезным оказывается практический прием, позволяющий существенно сгладить неустойчивые экстремумы [185].

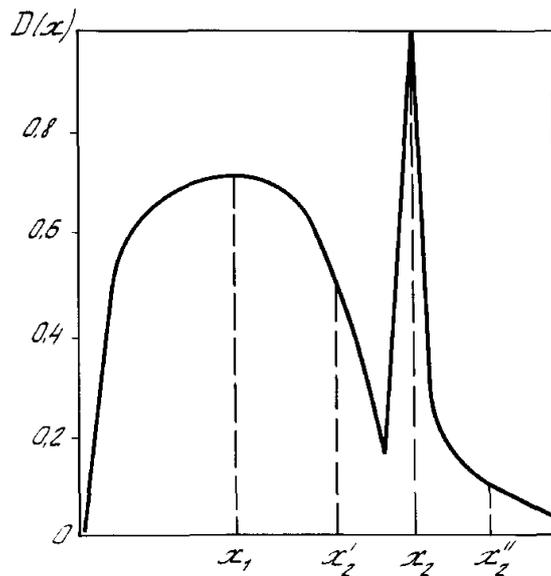


Рис. 2.34. Двухэкстремальная задача: x_2 – точка глобального экстремума; $x_2' = x_2 - \Delta x$; $x_2'' = x_2 + \Delta x$; Δx – погрешность установки x

Пусть на основе реализации численного эксперимента, проведенного по некоторому плану, в точках \bar{X}_i ($i = 1, \dots, M$) получена следующая регрессионная зависимость, описывающая поведение глобального экстремума (2.33) в области изменения \bar{X}

$$D(\bar{X}) = a_0 + \sum_{1 \leq j \leq L} a_j X_j + \sum_{1 \leq j \leq k \leq L} \sum b_{jk} X_j X_k + \sum_{1 \leq j \leq L} c_j X_j^2 + \dots \quad (2.34)$$

Положим, что для каждой компоненты X_j известна точность установки или измерения в реальных условиях ΔX_j . Тогда для точек численного эксперимента можно вычислить усредненные в пределах погрешностей значения $D(\bar{X})$

$$\bar{D}_i = \frac{1}{2^L \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_L} \int_{\bar{X}_i - \Delta \bar{X}_i}^{\bar{X}_i + \Delta \bar{X}_i} D(\bar{X}) d\bar{X} \quad (2.35)$$

Из выражений (2.34), (2.35) получаем

$$\begin{aligned} \bar{D}_i = & a_0 + \sum_{1 \leq j \leq L} a_j X_{j,i} + \sum_{1 \leq j \leq k \leq L} b_{jk} X_{j,i} X_{k,i} + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{1 \leq j \leq L} c_j \frac{\left((X_{j,i} + \Delta X_j)^3 - (X_{j,i} - \Delta X_j)^3 \right)}{\Delta X_j} + \dots, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $X_{j,i}$ – значение компоненты X_j вектора \bar{X}_i . Путем обработки рассчитанных по (2.34), (2.35) сглаженных значений глобального критерия получаем регрессионный полином, аналогичный (2.34), но содержащий меньше острых локальных экстремумов, чем исходный. Практика показывает, что использование описанного приема во многих случаях позволяет получить поверхность отклика, на которой нахождение надежного глобального максимума не представляет трудностей.

Во многих случаях полезную информацию о свойствах поверхности отклика (2.34) можно получить с помощью методов интервального анализа [54], который позволяет оперировать с математическими объектами, заданными интервалами своих значений. Используя правила интервальной математики и применяя принцип интервального расширения к выражению (2.34), можно прямым путем оценить верхнюю D_{imax} и нижнюю D_{imin} оценки $D(\bar{X})$ в окрестности \bar{X}_i , задаваемой интервалами $[X_{j,i} - \Delta X_j, X_{j,i} + \Delta X_j]$ ($j = 1, \dots, L$).

Значения D_{imax} , D_{imin} можно в дальнейшем использовать при построении полиномов, аналогичных (2.34), описывающих верхнюю и нижнюю огибающие исходной поверхности отклика. Решение оптимизационных задач на огибающих поверхностях позволяет получить полезную информацию о границах интервала, в котором могут находиться искомые оптимальные значения обобщенного показателя качества.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что в условиях многоэкстремальности отыскание глобального максимума не всегда эквивалентно решению задачи оптимизации. Для нахождения оптимума необходимо проводить сравнение всех значимых локальных максимумов по двум показателям: численным значениям глобальных критериев $D_{0i}(\bar{X}_i)$ и

устойчивости оптимума. Таким образом, выбор оптимума в условиях многоэкстремальности является двухкритериальной задачей принятия решений. Для ее постановки необходимо формализовать критерий устойчивости оптимума.

Основными источниками неопределенности в оценке D_{0i} при использовании идентифицированных моделей с фиксированными адаптивными параметрами являются неточность определения выходных контролируемых переменных \bar{Y} , вызванная неизбежными погрешностями моделей, и разброс значений \bar{X} в окрестности \bar{X}_i в силу невозможности на практике абсолютно точно выдерживать требуемые оптимальные значения входных переменных.

Значения компонент вектора \bar{Y} в точках локальных максимумов можно представить в виде:

$$Y_{il} = \bar{Y}_{il} + \Delta Y_{il} \quad (l = 1, \dots, k), \quad (2.37)$$

где \bar{Y}_{il} – математическое ожидание Y_{il} ; ΔY_{il} – погрешность модели.

Численные значения ΔY_{il} зависят от целого ряда факторов, определяющих неустранимую погрешность модели, и в первую очередь, от неизбежных изменений условий протекания процесса по сравнению с теми, при которых идентифицировалась модель. Сложность и многофакторность реальных процессов, трудности проведения экспериментов на действующем оборудовании зачастую приводят к невозможности достоверного определения закона распределения ошибок ΔY_{il} .

В то же время с достаточной определенностью можно утверждать, что во многих практически важных случаях возможность больших отклонений от математического ожидания ниже возможности малых ошибок ΔY_{il} . При наличии такого рода качественной информации целесообразно воспользоваться аппаратом теории возможностей. Тогда, интерпретируя D_i как степень принадлежности \bar{Y}_i области локального оптимума в соответствии с [132] получаем:

$$\bar{D}_i = \max_{\bar{Y}_i} (\pi_i(\bar{Y}_i) \wedge D_i(\bar{Y}_i)), \quad (2.38)$$

где $D_i(\vec{Y}_i)$ вычисляется из выражения (2.33) при фиксированном векторе \vec{X}_i (значения μ_1, \dots, μ_k в (2.33) рассчитываются непосредственно с использованием Y_{il} из (2.37)); $\pi_i(\vec{Y}_i)$ - функция распределения возможностей \vec{Y}_i ; из ее определения следует:

$$\pi_i(\vec{Y}_i) = \max_{Y_{i1}, \dots, Y_{ik}} (\pi_{i1}(Y_{i1}), \dots, \pi_{ik}(Y_{ik})). \quad (2.39)$$

Вычисления \bar{D}_i удобно проводить с помощью следующей процедуры [132]. Используя генератор равномерно распределенных случайных чисел, в области допустимых значений \vec{Y}_i находится некоторое число точек, для которых из выражения (2.33) отыскивается соответствующее D_i . Для массива значений $D_i(\vec{Y}_i)$ из (2.38) находится \bar{D}_i . Добавляя новые точки к исходной выборке, получим последовательность \bar{D}_i , сходящуюся к некоторому значению, которое и является искомой оценкой результата свертки (2.38). Учитывая, что при таком подходе в вычислениях μ_1, \dots, μ_k значения Y_{i1}, \dots, Y_{ik} задаются непосредственно без использования математической модели, рассмотренная процедура вычислений не требует существенных затрат машинного времени.

В случаях, когда заданы отношения между возможностями, т.е. когда для любых \vec{Y}_{i1} и \vec{Y}_{i2} в окрестностях математического ожидания вектора \vec{Y}_i выполняются требования:

$$\pi_i(\vec{Y}_{i1}) / \pi_i(\vec{Y}_{i2}) = m,$$

где m – известные для каждой пары \vec{Y}_{i1} , \vec{Y}_{i2} числа, вместо (2.38) целесообразно использовать выражение:

$$\bar{D}_i = \int \pi_i(\vec{Y}_i) D_i(\vec{Y}_i) d\vec{Y}_i \quad (2.40)$$

Выше указывалось, что при известных отношениях между возможностями распределение возможностей эквивалентно распределению вероятности, поэтому смысл выражения (2.40) достаточно ясен. Подчеркнем, что при наличии информации об отношениях возможностей (или, что эквивалентно, при известной плотности вероятности) следует использовать именно выражение (2.40).

Действительно, пусть $D_i(\vec{Y}_{i1}) = 0.3$; $D_i(\vec{Y}_{i2}) = 0.7$; $\pi(\vec{Y}_{i1}) = 0.8$; $\pi(\vec{Y}_{i2}) = 0.5$.

Тогда в соответствии с (2.38) $\bar{D}_i = \max(0.3, 0.5) = 0.3$. Изменение нормировки распределения возможности, например, $\pi'_i(\vec{Y}_i) = 0.3\pi_i(\vec{Y}_i)$ приводит к иному результату $\bar{D}_i = \max(0.24, 0.15) = 0.15$, причем изменения в \bar{D}_i отнюдь не пропорциональны изменениям в $\pi_i(\vec{Y}_i)$. Легко проверить, что при использовании (2.40) значения \bar{D}_i пропорциональны изменениям π_i и D_i , т.е. свертка сохраняет исходную информацию об отношениях возможностей. Это особенно важно, если учесть, что π_i и D_i часто являются результатами промежуточных вычислений и нуждаются при использовании для расчета D_i в предварительной нормировке на единицу.

Отметим, что как при наличии, так и при отсутствии надежной информации об отношениях возможностей, их распределения при проведении расчетов в конечном итоге задаются вполне определенными функциями или в виде таблиц. В противном случае какие-либо вычисления были бы невозможны. Очевидно, что описание $\pi(\vec{Y})$ функциями или таблицами эквивалентно заданию отношений возможностей. Поэтому на практике часто бывает трудно сделать однозначный выбор выражения для расчета \bar{D}_i , даже если надежна лишь качественная информация о распределении $\pi(\vec{Y})$.

В этих случаях для оценки \bar{D}_i целесообразно использовать оба способа свертки (2.38) и (2.40). Значения \bar{D}_i в (2.38) можно интерпретировать как меру эффективности локального оптимума, представляющую собой свертку равнозначимых частных критериев. Последние описываются функцией принадлежности $D_i(\vec{Y}_i)$ подмножества возможных значений \vec{Y}_i . При этом частный критерий $D_i(\vec{Y}_i)$ характеризует локальный оптимум с точки зрения близости к глобальному, критерий $\pi_i(\vec{Y}_i)$ обеспечивает оценку возможности реализации этой степени близости. В общем случае описанные критерии могут оказаться неравнозначимыми, что может быть учтено в обобщении выражения (2.38)

$$\bar{D}_i = \max\left(\pi_i^{\alpha_1}(\vec{Y}_i) \wedge D_i^{\alpha_2}(\vec{Y}_i)\right), \quad (2.41)$$

где α_1, α_2 – коэффициенты относительной важности критериев.

Перейдем к рассмотрению неопределенностей, вызванных разбросом значений характеристик, описываемых дисперсией \vec{X}_i . В этом случае простейшей характеристикой

локального оптимума будет его математическое ожидание, уже рассмотренное выше (выражения (2.35), (2.36)). При наличии информации о распределении \vec{X}_i в окрестности локального оптимума, заданной в форме распределений вероятности или возможности, можно ввести характеристики, аналогичные (2.38), (2.40) и (2.41)

$$\bar{D}_i(\vec{X}_i) = \max(\pi_i(\vec{X}_i) \wedge D_i(\vec{X}_i)), \quad (2.42)$$

$$\bar{D}_i(\vec{X}_i) = \int \pi_i(\vec{X}_i) D_i(\vec{X}_i) d\vec{X}_i, \quad (2.43)$$

$$\bar{D}_i(\vec{X}_i) = \max(\pi_i^{\alpha_1}(\vec{X}_i) \wedge D_i^{\alpha_2}(\vec{X}_i)), \quad (2.44)$$

где $D_i(\vec{X}_i) = D_i(\vec{Y}_i(\vec{X}_i))$.

Использование в этих случаях выражения (2.33) потребует многократного обращения к модели и, следовательно, больших затрат машинного времени, поэтому оценки (2.41) – (2.44) целесообразно проводить с использованием поверхностей отклика в виде регрессионных полиномов типа (2.34). Оценки (2.41) – (2.44) можно интерпретировать как степень надежности получения высоких значений глобального критерия в локальном оптимуме.

Представляет интерес оценка эффективности оптимума, основанная на идеях работы [162]. Пусть в точке \vec{X}_{i0} найден локальный оптимум. Рассмотрим в окрестности этой точки некоторое множество $\vec{X}_{i,j}$, характеризующееся вероятностями P_j и значениями глобального критерия $D_{ij}(\vec{X}_{i,j})$. Тогда $N(P) = \sum_j \mu_P(P_j)$, в соответствии с интерпретацией [162], - количество значимых точек в окрестности \vec{X}_{i0} (или количество возможных точек). В случае нормировки распределения P_j на единицу $\mu_P(P_j) = P_j$. В итоге значение

$$\bar{D}_i = \left(\sum_j D_{i,j}(\vec{X}_{i,j}) \wedge \mu_P(P_j) \right) / N(P) \quad (2.45)$$

можно интерпретировать как возможность получения оптимума с большой вероятностью.

Отметим, что, несмотря на некоторые отличия в интерпретациях оценок (2.38), (2.40) – (2.45), они мало отличаются по смыслу и характеризуют в той или иной степени надежность получения в точке локального оптимума больших по величине значений глобального критерия при учете тех или иных неопределенностей.

Это позволяет строить обобщенные оценки при учете одновременно неопределенностей в \bar{X} и \bar{Y} путем объединения выражений (2.38), (2.40) – (2.43). В зависимости от способа представления информации о характере распределений \bar{X} и \bar{Y} получены четыре основных варианта оценки локального оптимума (индекс «i» для упрощения записи опускаем) [132]:

$$\bar{D}_1 = \max_{\bar{X}} \left(\pi(\bar{X}) \wedge \max_{\bar{Y}} (D(\bar{Y}(\bar{X})) \wedge \pi(\bar{Y})) \right) \quad (2.46)$$

$$\bar{D}_2 = \max_{\bar{X}} \left(\pi(\bar{X}) \wedge \left(\int D(\bar{Y}(\bar{X})) \pi(\bar{Y}) d\bar{Y} \right) \right) \quad (2.47)$$

$$\bar{D}_3 = \int \pi(\bar{X}) \left(\max_{\bar{Y}} (D(\bar{Y}(\bar{X})) \wedge \pi(\bar{Y})) \right) d\bar{X} \quad (2.48)$$

$$\bar{D}_4 = \int \pi(\bar{X}) \int (D(\bar{Y}(\bar{X})) \pi(\bar{Y})) d\bar{Y} d\bar{X} \quad (2.49)$$

Выражения (2.46) – (2.49) легко обобщаются на случай ранжированных D и π . Для того, чтобы оценки эффективности $\bar{D}_1 - \bar{D}_4$ были количественно сопоставимы и находились в интервале $[0,1]$, должны выполняться условия $\int \pi(\bar{X}) d\bar{X} = 1$; $\int \pi(\bar{Y}) d\bar{Y} = 1$, т.е. к распределению возможностей предъявляются те же требования, что и к распределению вероятностей.

Функции $D(\bar{Y}(\bar{X}))$ являются различными вариантами свертки частных критериев, поэтому конкретизация выражений (2.44) – (2.49) порождает широкий спектр оценок эффективности оптимума, которые иногда целесообразно тем или иным способом сворачивать в некоторый обобщенный показатель эффективности. При этом в свертке могут участвовать оценки типа (2.41), (2.44), (2.45), а также любые другие, имеющие смысл показателя эффективности локального оптимума.

При наличии адекватной математической модели исследуемого процесса реализация разработанной методики многокритериальной оптимизации на ЭВМ требует использования алгоритмов построения регрессионных зависимостей по данным численных экспериментов и алгоритмов поиска экстремума функций нескольких переменных. Регрессионные зависимости для этого целесообразно строить на базе методики [34], основанной на общей идее регрессионного анализа при произвольном плане. Эта методика обладает по сравнению с традиционными методами планирования эксперимента следующими преимуществами: отсутствует требование точной реализации принятого плана, т.е. в построении модели могут быть использованы все полученные данные; выбор точек плана может носить случайный характер; отсутствуют ограничения на форму и степени регрессионного полинома; алгоритм обеспечивает автоматический выбор структуры и коэффициентов полинома из статистических требований точности аппроксимации. Недостатком методики является необходимость больших затрат машинного времени непосредственно на обработку данных, что на практике вполне компенсируется снижением затрат на проведение численных экспериментов за счет уменьшения их количества, необходимого для достижения требуемой точности аппроксимации.

Отметим также, что поиск экстремумов в [132] эффективно проводится с использованием метода последовательной квадратической аппроксимации [136]. Идея метода состоит в последовательной аппроксимации значений максимизируемой функции в области поиска экстремума гладким квадратическим полиномом на каждом шаге поиска оптимума. Это упрощает задачу поиска экстремума за счет сглаживания незначимых локальных экстремумов. Важным достоинством метода является его нечувствительность к форме критерия, который может не иметь конечных производных.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В главе II были описаны методы многокритериальной оптимизации в условиях неопределенности, которые могут быть использованы для решения широкого круга проблем совершенствования технологических процессов. В то же время успех их применения во многом определяется качеством используемых математических моделей рассматриваемых процессов. В сущности, речь идет об адекватности моделей, которая обычно понимается как степень соответствия расчетных данных результатам натуральных экспериментов, т.е. как точность модели. Традиционным подходом к повышению точности моделей являются хорошо описанные в учебной и научной литературе методы параметрической идентификации. Последние позволяют, используя модель заданной структуры, отыскать совокупность значений ее неопределенных параметров, минимизирующих отклонение расчетных и экспериментальных данных. Однако описание одного и того же технологического процесса можно, как правило, провести, используя целую совокупность приближенных моделей различной сложности и, следовательно, структуры, содержащих разные наборы неопределенных параметров (принцип множественности моделей). Последнее ставит на повестку дня необходимость выработки общего подхода к повышению качества описания анализируемых процессов, который будем называть структурно-параметрической идентификацией [132, 33, 7].

§ 3.1. Структурно-параметрическая идентификация

Создание единой формализованной методики структурно-параметрической идентификации, пригодной для работы с детерминированными моделями процессов произвольной сложности - задача на сегодняшний день, по-видимому, неосуществимая. Поэтому предлагаемая в настоящей главе методика ориентирована, главным образом, на построение адекватных математических моделей для использования при оптимизации функционирования технологических процессов.

Основные трудности при построении формализованной методики структурной идентификации связаны не столько с математическими, сколько с методологическими проблемами. Несмотря на то, что решению последних в трудах отечественных и зарубежных ученых уделено сравнительно много внимания, при разработке конструктивной методики структурно-параметрической идентификации потребовалось провести их критический

анализ, взглянуть на них под несколько другим углом зрения, ввести некоторые новые понятия.

Этим обосновывается структура построения настоящей главы, отражающая примат методологических проблем (п.п. 3.1.1) над чисто математическими и техническими вопросами.

3.1.1. Принципы построения детерминированных математических моделей и их редукции

Создание адекватной математической модели в той или иной ее форме является (в широком смысле понимания задачи) решением проблемы идентификации, а также необходимым условием оптимизации. Этим объясняется постоянный интерес к вопросам моделирования методологов и философов науки, особенно выросший в связи с новыми возможностями, открываемыми использованием ЭВМ. Сложность возникающих методологических проблем, наличие большого числа неформализуемых субъективных аспектов при построении моделей сформулировало у многих исследователей представление о том, что моделирование является более искусством, чем наукой [19, 4, 74]. Однако эта точка зрения не отвергает возможность и целесообразность изучения проблем моделирования с научных позиций и, вообще говоря, не отвергает научного подхода в исследовании искусства. Разрешение методологических вопросов моделирования способствует как выработке разумных стратегий в исследовании общих свойств и показателей эффективности моделей, так и созданию конструктивных методик и решений конкретных задач.

Существует множество определений понятия модели, изменяющихся от весьма общих, в которых модель и теория почти эквивалентны, до частных, связанных с конкретными целями моделирования. Например, в работе [104] дается определение модели как результата процесса познания, зафиксированного в мозгу или вне его на подходящей физической среде. В [152] под моделью предлагается понимать систему (вещественную или знаковую), собственные свойства которой настолько близки к свойствам интересующего исследователя объекта, что при помощи экспериментов с ней удастся узнать нечто новое о самом объекте, причем это новое достаточно важно для исследователя. Оригинальная трактовка предложена в [89], где модель рассматривается как вопрос, задаваемый исследователем природе. Все эти определения, а также множество других не следует противопоставлять друг другу, а в соответствии с принципом дополнительности Бора их

можно рассматривать совместно, как отражающие различные стороны одного и того же сложного явления.

Такое многообразие моделей более полно вскрывает существо связей и диалектику взаимоотношений пары противоположностей анализ-синтез и позволяет изучать разные аспекты явления, которые в зависимости от преследуемых целей выдвигаются на первый план. В основе любой модели лежит более или менее развитая теория, которая в силу своей общности и абстрактности позволяет описывать большое количество частных фактов с помощью небольшого числа исходных посылок. При этом непосредственное соотношение результатов теории с экспериментальными данными, как правило, осуществляется на основе частных моделей, являющихся некоторыми редуцтами теории, вычлененными из нее для решения конкретной задачи. В этом смысле каждая разработанная модель выражает компромисс между теорией и практикой, между теоретическим познанием и эмпирическими данными.

Такое разграничение теории и модели также следует понимать диалектично, так как есть модели по полноте и сложности почти эквивалентные теории, на базе которой они построены. Наконец, теорию можно рассматривать как некоторую модель части объективной действительности [146, 56].

Отсутствие единого строгого определения ни в коей мере не служит препятствием к изучению эмерджентных, т.е. целостных, общих, не зависящих от конкретной структуры, свойств моделей [139, 97]. Например, такая ситуация имеет место в теории планирования эксперимента [89], которая успешно развивается при отсутствии единого определения основополагающего понятия эксперимента, поскольку в конкретных ситуациях среди исследователей, как правило, не возникает споров о применимости этого понятия к тому или иному феномену.

Существует множество работ, посвященных классификации моделей. В большинстве случаев в качестве оснований классификации избираются цель, объект, средства моделирования. Такой выбор естественен, так как практически в любом определении или описании понятия модели присутствуют названные термины. При этом общепринятой классификации моделей нет. Как отмечают авторы [28], классификация моделей по таким основаниям как цель, объект, средства моделирования и недостаточна для их строгой систематизации и не может привести к построениям, подобным по своей значимости таблице Д.И.Менделеева или систематике К.Линнея. В то же время, для конструктивного использования моделей необходима, если не систематизация, то, по крайней мере, упорядочение целей. В равной мере это требуется для объектов и методов моделирования. В

настоящее время в системном анализе и теории моделирования примеров достаточно полных подобных систематизаций и упорядочений нет. Существуют лишь частные классификации подобного типа, например, для объектов моделирования какого-либо определенного рода на основе различия типов применяемых методов. К сожалению, такие упорядочения фактически соответствуют простому перечислению методов, разработанных в какой-либо научной дисциплине. Однако, это не отвергает полезности и значимости, весьма скромных пока еще результатов в области систематизации моделей, возможности их успешного применения при решении как сугубо методологических, так и практических вопросов.

В качестве одной из наиболее удачных систематизации в контексте моделирования технологических процессов можно назвать шкалу моделей, предложенную в [142]. Авторы справедливо считают классификацию, основанную на способах моделирования, методологически несостоятельной, поскольку выбор "техники" моделирования не должен предшествовать выбору его метода, который определяется целями исследования и степенью полноты эмпирической информации об изучаемой системе. Более конструктивны классификации, основанные на внутренних свойствах моделируемых объектов. В основе таких систематик лежит анализ связей между усложняющимся поведением объектов и методами их моделирования.

В [152] предложено пять основных классов моделей: аналитические модели, эмпирико-статистические, имитационные, самоорганизующиеся и модели эвристического программирования. Здесь необходимо сделать некоторую конкретизацию используемых терминов. Существует двоякая трактовка термина "имитационная модель". В узком смысле этим термином обычно принято обозначать модели производственно-технологических, экономических и прочих систем, непосредственно реализуемые на ЭВМ с помощью методов статистических испытаний (метод Монте-Карло). Такого рода модели обычно хорошо функциональную отражают организацию структуры анализируемых процессов, совершенно не затрагивая сущности определяющих их явлений физической, химической, биологической и т.д. природы. В широком смысле под имитационными моделями понимаются любые модели, имитирующие поведение сложных систем с использованием ЭВМ. В дальнейшем мы будем опираться именно на такое широкое понимание имитации.

Простые системы зачастую наиболее адекватно представляются аналитическими моделями (например, законы Ньютона, Ома, и т.д.). Аналитические модели сложных систем в силу своей "упрощенности" (при их построении сознательно идут на выбор только самых существенных, с точки зрения исследователя, элементов и связей) выполняют в основном объяснительную функцию теории при условии, что лежащие в их основе гипотезы

справедливы и непротиворечивы. Эти модели часто реализуются без ЭВМ и позволяют построить качественную картину анализируемого явления или объекта.

При этом различают две группы аналитических моделей: феноменологические [278], которые строятся в результате непосредственного наблюдения за системой, и модели потенциальной эффективности сложных систем [141]. Последние применяются лишь к системам, которые уже достаточно приблизились к своим оптимальным прототипам. Они носят оценочный характер и определяют некоторые "запреты" на конечные исходы.

В работе [58] отмечается, что в последнее время существенно увеличилось число проблем, решение которых не может быть получено редуccionистическими методами, основанными на достаточном описании внутреннего состояния системы. Это стимулировало интерес к изучению и развитию холистических, или глобальных, системобразующих характеристик. Например, в холистическом подходе к моделированию технологических объектов исходят из условия минимума энергии изучаемого процесса, что в ряде случаев позволяет избежать анализа и решения громоздких систем дифференциальных уравнений. Холистический, или глобальный, подход позволяет, зачастую, построить систематическую модель в простой аналитической форме, что, однако не говорит о простоте и легкости получения решения. Глобальное моделирование обеспечивает получение результата лишь при очень высокой квалификации исследователя. Оно требует от исследователя глубокого понимания процесса и способностей к обобщению.

Основная задача эмпирико-статистических моделей – упорядочить большой объем экспериментальной информации о структуре и поведении исследуемой системы и дать обобщенную информацию для построения других математических моделей. До недавнего времени было принято считать, что эмпирико-статистические модели целесообразно использовать лишь на первом этапе математизации той или иной области знания, поскольку они не позволяют вскрывать причинно-следственные связи моделируемых систем. Однако, в связи с успехами имитационного моделирования роль эмпирико-статистических моделей изменяется.

Действительно, в тех случаях, когда имитационные модели не слишком сложны и обладают обозримым набором входных и выходных переменных, доступных для непосредственного анализа и принятия обоснованных решений, иложенная точка зрения оправдана. В этих случаях содержательная информация об изучаемой системе доставляется, главным образом, имитационной моделью, а эмпирико-статистические построения носят вспомогательный характер, и используются, в основном, для целей идентификации.

Однако, при достижении некоторого порога сложности имитационной модели,

возможность непосредственного анализа возросшего объема информации, получаемой с ее помощью, становится проблематичной. Возникают естественные вопросы сжатия, разумного агрегирования этой информации. И тут опять на помощь приходят статистические методы уже в новом своем качестве, позволяя утилизировать результаты имитационного моделирования, строить достаточно простые регрессионные модели изучаемого процесса. Характерно, что при этом эмпирико-статистические модели выполняют не только утилитарные функции, но и познавательные, выявляя взаимосвязи системы, неявно содержащиеся в имитационной модели. Такое сочетание имитационных и эмпирико-статистических моделей рассматривается в настоящее время как один из принципов моделирования сложных систем [140, 30]. Примеры успешного использования этого подхода на практике приведены в последующих главах книги.

Имитационные модели отображают представления исследователя о структуре и динамике изучаемой системы. При построении таких моделей широко используются существующие теории, пригодные для описания изучаемых процессов, накопленный опыт и интуиция исследователя. Именно при построении имитационных моделей наиболее отчетливо проявляются те неформализуемые субъективные факторы, которые дают возможность в определенной мере причислять математическое моделирование к искусству.

Адекватность (с точки зрения выполнения некоторой цели) в имитационной модели достигается обычно за счет приближения числа ее параметров и взаимосвязей к числу аналогичных характеристик исследуемой системы [148]. Сразу отметим, что ввиду неопределенности ряда параметров такой путь не всегда ведет к цели. Реализация имитационных моделей осуществляется на ЭВМ в виде комплекса программ с использованием блочного принципа построения. Некоторые авторы рассматривают условие реализации на ЭВМ основным признаком имитационной модели [95]. С этим трудно согласиться, так как на ЭВМ зачастую реализуются приближенные аналитические модели, а также эмпирико-статистические построения.

Положительными чертами имитационных моделей является высокая точность прогнозов (при условии адекватности модели), гибкость модели по отношению к новым ситуациям (возможность ее быстрой перестройки в силу блочного принципа построения). К отрицательным чертам обычно относят низкую возможность объяснения поведения системы, необходимость иметь достаточно большой объем эмпирической информации для идентификации и верификации модели и очень высокую стоимость разработки.

Самоорганизующиеся модели строятся для целей более адекватного описания сущности явлений и обеспечения прогнозирования функционирования сложных систем.

Прогнозирующими свойствами обладают также и имитационные модели, однако для синтеза самоорганизующихся моделей на ЭВМ необходимо значительно меньше исходной информации и финансовых затрат (в силу значительной общности алгоритмов самоорганизации).

К наиболее известным методам самоорганизации моделей следует отнести эволюционное моделирование [95] и метод группового учета аргументов [49]. В последнем случае функция исследователя сводится главным образом к заданию списка исходных переменных и "критерия селекции". Последний выражает представления исследователя о качестве получаемой модели. Например, в качестве критерия селекции может выступать ошибка прогноза проверочной последовательности экспериментальных данных, после того как модель построена на основе другой последовательности - обучающей. В итоге модель строит ЭВМ путем перебора различных частных моделей и выбора для дальнейшего анализа лучших из них (с точки зрения принятого критерия селекции).

Поскольку частные модели, как правило, представляют собой лишь несложные комбинации элементарных или специальных функций, самоорганизующиеся модели в своей окончательной форме мало отличаются от эмпирико-статистических построений. В этом случае классификация этих двух видов моделей на основе анализируемого подхода затруднена, поскольку в его основе предполагалось использовать не способ построения моделей, а их внутренние свойства, связанные с особенностями исследуемой системы. С этой точки зрения самоорганизующиеся модели, а также модели эвристического программирования, следовало бы объединить в один класс с эмпирико-статистическими.

В итоге, основываясь при классификации лишь на свойствах внутренней структуры моделей, последние можно разбить на два больших класса: статистические и детерминированные. К детерминированным моделям (в контексте моделирования технологических процессов) отнесем аналитические, имитационные и все другие математические модели, построенные путем редукции и синтеза положений содержательных естественнонаучных теорий. Параметры таких моделей обычно имеют достаточно ясный физический смысл, взаимосвязи между переменными выражаются алгебраическими, дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями. Во многих случаях для технологических процессов можно построить детерминированные модели, поэтому основное внимание уделим методическим проблемам разработки моделей именно этого класса.

Модель всегда строится с определенной целью. Цель моделирования может быть явно или неявно выражена, однако она всегда существует, поскольку иначе никто бы

моделированием не занимался. В этой связи удачно суждение Б.Брехта о том, что нельзя создавать образы, не имея о них определенных суждений и не преследуя определенных целей [17]. Вопрос лишь в том, каковы эти цели и в какой степени разработанная модель отвечает исходным установкам, например, прикладного характера. Рассматривая проблему с этой точки зрения, следует признать, что кажущиеся иногда довольно некорректные постановки "зачастую" в приведенном выше в смысле, отражают важнейшие субъективные факторы, неявно присутствующие в процессе моделирования.

Разработчиков модели можно условно разделить на методо-ориентированных и проблемно-ориентированных. Первых отличает глубокое знание одного или целого класса методов решения этого или иного типа задач в области, где сосредоточены их основные научные интересы. Получая заказ на разработку конкретной математической модели прикладного назначения такой разработчик неизбежно стремится к постановке задачи, при которой его методы наиболее эффективны. Зачастую это достигается введением дополнительных упрощений модели, недостаточно обоснованных и не следующих непосредственно из анализа физики процесса.

Вопрос о существующем злоупотреблении формальной математикой при построении моделей конкретных реальных процессов обсуждался еще на шестом конгрессе ИФАК в Бостоне [214]. В пленарном докладе В.Холла отмечалось, что построение математических моделей часто превращается в автокаталитический процесс, вследствие чего одни части системы моделируются излишне точно, некоторые методики развиваются чрезмерно глубоко, при этом другие части систем из соображений математического удобства недопустимо упрощаются. Факторам, которым нельзя придать строгую математическую форму, уделяется недостаточное внимание [214]. Зачастую это происходит из-за того, что личные цели исследователя вступают в противоречие с исходными целями моделирования. В итоге построенная модель может настолько не соответствовать по своим качествам постановленным прикладным целям, что ее допустимо рассматривать лишь как иллюстрацию того или иного метода решения. Фактически, при этом происходит подмена исходной цели моделирования.

Проблемно-ориентированными будем называть исследователей, которые в максимально возможной степени пытаются учесть сущность явлений, у которых сформирована установка на создание модели, наиболее "адекватной реальному объекту" и поставленным целям. Существует большое количество работ, в которых авторы исследований, анализируя степень адекватности объекту моделей, отражающих различные стороны его поведения, и, приводя численные сопоставления, не указывают явно ни цели

такого сопоставления, ни цели, стоящие перед теми, кто создавал сравниваемые модели. Говорить об адекватности модели реальному объекту вообще, без указания возможного баланса между целями моделирования и средствами, привлекаемыми для их достижения, бессмысленно.

При этом, установка на создание наиболее полной модели имеет право на жизнь, поскольку именно такие модели в силу своей максимальной информативности, избыточной по отношению к прагматическим целям, позволяют выявлять новые закономерности. Приведенные рассуждения сделаны для того, чтобы подчеркнуть важность учета взаимодействия субъективных и объективных факторов при построении моделей.

Очевидно, что критерии качества моделей меняются в зависимости от целей моделирования. Один и тот же процесс может быть описан с помощью разных моделей, имеющих различные критерии качества. В соответствии с этим для детерминированных моделей можно в первом приближении выделить три основных класса, определяемых целями моделирования:

1. "Гносеологические" модели. Целью их разработки является выявление качественных закономерностей процесса, внутренних взаимосвязей, недоступных прямым экспериментальным исследованиям. Этот класс моделей можно условно разделить на два типа:

а) Приближенные модели. На их основе возможно получение аналитических решений в виде формул, удобных для качественного анализа, обычно отражающих какую-либо одну сторону явления (за исключением случаев холистических аналитических моделей);

б) "Полные" математические модели. При их построении стремятся к наибольшей детализации физики процесса, включая в них ради целей качественного анализа даже весьма неопределенные параметры, что является характерной чертой моделей технологических процессов. С увеличением числа параметров резко снижается возможность параметрической идентификации модели как за счет возрастания затрат машинного времени, так вследствие увеличения корреляции между оцениваемыми значениями [89].

2. Модели для оптимизации или выбора наиболее рациональных технологических режимов и конструкций оборудования. Этот класс непосредственно ориентирован на решение конкретных задач и по сложности занимает промежуточное положение между аналитическими зависимостями, полученными приближенными методами, и "полными" моделями первого класса. Фактически это не что иное, как имитационные модели, достаточно точно для прикладных целей описывающие реальные процессы, но требующие

сравнительно небольших затрат машинного времени и поддающиеся идентификации. Такие модели в настоящее время наиболее популярны в технических приложениях.

3. Модели для автоматического управления технологическими процессами. Эти модели обычно учитывают динамику процесса, но при этом предельно просты для обеспечения максимального быстродействия и их корректировки (адаптации) в процессе управления [32]. Они, как правило, адекватны лишь в сравнительно узком диапазоне изменения входных переменных.

Модели первого класса по мере их усложнения асимптотически стремятся к недостижимому на практике идеалу - полной формализации исследуемых явлений. Иными словами, эти модели близки по своей полноте и сложности к естественнонаучным теориям. Последнее создает предпосылки для оценки их качества по тем же критериям, что и для сравниваемых теорий, т.е. по эвристической силе, способности предсказывать новые закономерности, поддающиеся эмпирической проверке [146, 56], определяемой их скрытой информационной емкостью. Каких-либо строгих, формализованных процедур сравнения таких моделей в настоящее время нет. Модели третьего класса исследуются в рамках теории автоматического управления.

В дальнейшем будут исследоваться свойства, главным образом, моделей второго класса, в наибольшей степени пригодных для решения задач оптимизации режимов технологических процессов. Совместные усилия исследователей, занимающихся методическими вопросами и непосредственным моделированием реальных объектов, позволили выявить ряд закономерностей деятельности этого рода, имеющих весьма общий характер.

Обобщенной целью разработки любой модели можно считать получение с ее помощью информации для принятия тех или иных решений. Поэтому успех в достижении конкретных целей (прогноз, оптимизация и т.д.) во многом зависит от объема и качества информации, получаемой с помощью моделирования. Естественный путь повышения информативности математических моделей посредством их усложнения и детализации на практике ограничен, так как для формализованных систем, сложность которых превышает некоторый пороговый уровень, детальность описания и практическая ценность получаемой информации становятся антагонистическими характеристиками. Это ограничение сверху на сложность моделей носит название принципа несовместимости [336].

Необходимость учета этого принципа при исследовании технических объектов очевидна и следует из анализа самого процесса моделирования. Действительно, добавление к системе соотношений, описывающих поведение объекта, каждого нового уравнения

неизбежно ведет к росту числа неопределенных параметров модели, что снижает достоверность количественной информации, получаемой с ее помощью. По мере усложнения описания объекта, неопределенность получаемой информации возрастает, что в итоге делает ее практически непригодной. Избежать этого, используя методы параметрической идентификации, удастся лишь отчасти как из-за технических трудностей, так и по причине резкого роста корреляции между оцениваемыми параметрами с увеличением их числа. Следует подчеркнуть, что в настоящее время с ростом производительности ЭВМ и, следовательно, технических возможностей математического моделирования, модели технических систем все чаще оказываются на пороговом уровне сложности.

Методологическое значение принципа несовместимости состоит еще в том, что он прямо указывает на ограниченность самого метода математического моделирования, рассматривая при этом не трудности построения модели (которые всегда относительны), а наиболее общие закономерности этого процесса.

В определенной мере расширить границы сложности моделей и частично преодолеть "проклятие многомерности" [9] удастся с помощью декомпозиции полной модели на подмодели, качество которых можно оценить до включения их в общую систему. Блочный способ построения, вообще говоря, является одним из типичных признаков имитационной модели [87]. В конечном итоге разумное разбиение полной модели на составляющие позволяет построить работоспособную систему, обеспечивающую исследователю достоверную информацию при приемлемых затратах машинного времени. В этом и заключается в соответствии с терминологией [141] принцип осуществимости.

Вопросы декомпозиции модели оказываются в методическом отношении весьма сложными и требуют отдельного рассмотрения. Процесс построения математической модели - это всегда некоторое упрощение, усечение физической реальности, вычленение некоторой совокупности взаимосвязей из более общей системы. Иными словами, если имеется модель A , то всегда можно построить модель A' , в которую A входит как подсистема. Структуру математической модели удобно представлять в виде ориентированного графа Кенига [107], в котором B -вершины обозначают переменные, W -вершины - соотношения, уравнения, связывающие переменные.

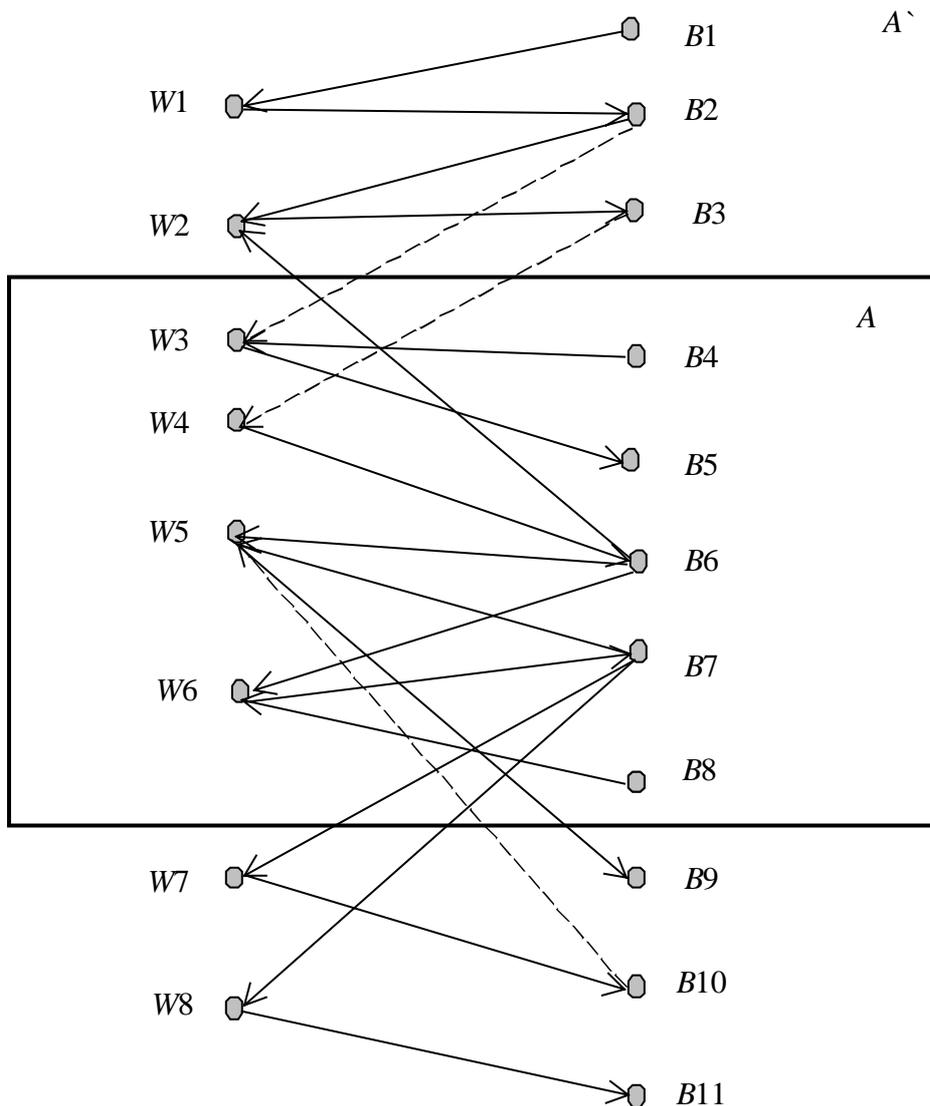


Рис. 3.1. Выделение подмодели A из подмодели A' (пунктиром отмечены дуги, соответствующие обрываемым связям)

Положим, что структуру модели можно представить графом, изображенным на рис. 3.1. Среди входных B -вершин имеются адаптивные параметры $B1$ и $B4$. При вычленении подмодели A из A' параметр $B4$ остается адаптивным для A , параметр $B8$ - входным, $B5$ - выходным. Уравнения $W3, W4$ и $W5$ подмодели A требуют для себя в качестве входных значения параметров $B2, B3$ и $B10$, точную информацию о которых можно получить только из полной модели A' , включающей A . Таким образом $B2, B3$ и $B10$, являясь входными параметрами для модели A , зависят от нее самой, причем входными они являются лишь в силу того, что при вычленении A из A' произошел разрыв связей этих параметров с

уравнениями подмодели A . В дальнейшем будем называть такие параметры *параметрами разорванных связей*. Таким образом, параметрами разорванных связей модели A^* и подмодели A являются все входные параметры A , не являющиеся входными или адаптивными для A^* .

В этом случае обобщенную формулировку математической модели представим в виде:

$$\bar{Y} = f(\bar{X}, \bar{\theta}, \bar{\Omega}), \quad (3.1)$$

где \bar{X}, \bar{Y} - векторы входных и выходных переменных модели; $\bar{\theta}, \bar{\Omega}$ - векторы адаптивных параметров моделей и параметров разорванных связей.

При изолированном анализе подмодели A параметры разорванных связей в общем случае известны лишь с точностью до физически допустимых диапазонов их изменения. В то же время включение их в набор адаптивных параметров подмодели A может привести к искажению результатов оценки качества этой подмодели. Например, при идентификации $B2$, $B3$ и $B10$ по критерию минимума отклонения расчетных значений от опытных, возможно получение таких соотношений между найденными значениями $B2$, $B3$ и $B10$, которые невозможны ни при каком наборе входных и адаптивных параметров модели A^* . Иными словами, подмодель A модели A^* при этом, несмотря на возможно высокую точность, не удовлетворяет требованиям физичности, что не позволяет доверять ей при выходе за пределы области входных параметров, в которой подмодель A идентифицировалась, т.е. подмодель A непригодна для прогноза.

Отсюда следует вывод, что оценка качества подмоделей должна проводиться на всей области физически допустимых значений параметров разорванных связей. Другим выводом является необходимость при декомпозиции сложной модели на подмодели руководствоваться принципом минимальности обрываемых связей, в соответствии с которым вычленение подмоделей нужно проводить по возможности так, чтобы минимизировать число параметров оборванных связей, которые являются существенным источником неопределенности при оценке качества подмоделей.

Еще одним принципом, которому по возможности желательно следовать при декомпозиции сложной модели, является принцип обрыва "мягких" связей. Под "мягкими" подразумеваются связи, позволяющие существенно изменять объем, а иногда и качественный характер информации, передаваемой из одной подмодели в другую. При этом не должно наблюдаться существенных изменений в результатах расчета. Иными словами,

"мягкие" связи не играют определяющей роли для модели и не служат каналом передачи значений переменных и параметров, существенным образом влияющих на результаты расчета. Следствие принципу обрыва "мягких" связей позволяет получить гибкую структуру обобщенной модели, в которой могут быть использованы подмодели при разных уровнях детализации описания физики процесса.

Поскольку выявление "мягких" связей требует глубокого анализа сущности процесса и работы с уже построенными моделями, на этапе формализации описания процесса при выявлении этих связей возможны ошибки, которые впоследствии снижают качество всей построенной системы. Последнее говорит о чрезвычайной важности этапа анализа процесса и постановки задачи.

Следующим методологически важным вопросом является возможность описания одного и того же процесса или его составляющих целым набором математических моделей, отвечающих одним и тем же целям моделирования, что в настоящее время рассматривается как *принцип множественности моделей*.

Вопрос этот интересен не только с практической, но и с общеполитической точки зрения. Последнее объясняется эрозией укоренившихся в сознании многих исследователей представлений о том, что мир устроен так, что все в нем управляется единственно возможными законами природы, а с другой стороны обладает еще и тем свойством, что научно поставленный эксперимент позволяет обнаружить эти законы [69]. Этот методологический постулат, хорошо вписывающийся в механистические представления науки XIX столетия, оказался бессильным перед фактами наличия различных формулировок теории относительности (философский анализ этой ситуации можно найти в [56]), весьма отличающихся по своим исходным постулатам от волновой и матричной формулировок квантовой теории. Сложившаяся ситуация в физике элементарных частиц, характерная наличием большого числа концептуально различающихся теорий, имеющих общий эмпирический базис, послужила толчком к попытке создания новой философии (*Boots-trap*) (стягивание) [177, 180].

Одним из основных положений этой философии является утверждение, что мир описывается комбинацией внутренне согласованных моделей, ни одна из которых не может быть более фундаментальной, чем другие.

Не останавливаясь на критике этой философии, имеющей, как это видно из работы [180] неопозитивистские корни, отметим, что многомодельность рассматривается методологами науки как один из основных принципов системного моделирования [98]. В работе [114] утверждается, что существование эквивалентных формулировок

экспериментально хорошо проверенной теории служит свидетельством ее достаточной зрелости.

В сложившейся ситуации авторы [90] предлагают отказаться от поиска "истинной модели", которой может просто не оказаться среди имеющихся вариантов описания процесса, и представлять результаты изучения механизма явлений не одной, а множеством моделей. В работе [18] это предложение конкретизируется и предлагается в противовес единой модели строить "тезаурус" - унифицированный ряд моделей, который по мнению автора расширяет условия применимости математического описания. Многомодельность в настоящее время характерна для большинства технических наук.

В 1977 г. Д.Форрестером был сформулирован принцип контринтуитивного поведения моделей [143], согласно которому дать удовлетворительный прогноз состояния достаточно сложной системы даже на качественном уровне, опираясь только на собственный опыт и интуицию, практически невозможно. Наша интуиция "воспитана" на общении с простыми системами, где связи элементов практически всегда удается проследить от начала до конца. Контринтуитивность поведения модели сложной системы состоит в том, что она реагирует на воздействия совсем иным образом, чем это нами ожидалось. Фактически рассматриваемый принцип говорит о возрастании эвристических возможностей моделей по мере их усложнения.

При практическом использовании моделей, например, для оптимизации, всегда актуален вопрос о выборе из имеющегося набора альтернативных математических описаний наиболее отвечающего целям моделирования. Этот выбор, естественно, должен осуществляться на основании определенных критериев качества.

В настоящее время становится общепризнанной точка зрения, что соответствие расчетных данных опытным не может служить единственным определяющим критерием адекватности моделей.

Отмечается, что при оценке качества моделей в первую очередь должна учитываться степень удовлетворения результатов моделирования поставленным при создании моделей целям [104, 251]. Существуют различные подходы к описанию критериев качества- модели. Как отмечают авторы [251], качество модели определяется единством требований соответствия основных гипотез, принимаемых при построении моделей, физике, химии, биологии и т.д. рассматриваемого процесса, требований точности и требований возможности прогноза нужных для практики характеристик (прагматический аспект). В [254] говорится о том, что в моделях происходит обмен между их всеобщностью, точностью и

реалистичностью. Усиление одной из этих позиций немедленно ведет к ослаблению других. Близкие методологические позиции занимает автор работы [270].

Проведенный анализ методологических проблем формулировки критериев качества моделей позволяет перейти к построению конструктивной методики структурно-параметрической идентификации.

3.1.2. Построение глобального критерия качества математических моделей

Исходные цели моделирования формируют требования к математической модели, в том числе к ее принадлежности тому или иному классу. Поскольку настоящая глава посвящена использованию математического моделирования для оптимизации технологических процессов, дальнейший анализ имеет отношение лишь к моделям второго типа (в соответствии с введенной в параграфе 3.1.1 классификацией).

Основными критериями, определяющими качество модели, должны служить те из них, которые имеют непосредственное отношение к целям моделирования. Например, при оптимизации режимов работы прокатного стана по выходной температуре полосы таким критерием является точность ее расчетов. В реальных условиях, как правило, имеется несколько критериев этого типа, зачастую находящихся в противоречии друг с другом.

Менее важный класс критериев связан с эксплуатационной надежностью модели (например, устойчивостью численного интегрирования), допустимыми затратами машинного времени, рядом требований к удобству работы с моделью и квалификации пользователей.

Существует также группа критериев, определяемая доверием к получаемой из модели информации, возможностью экстраполяции результатов моделирования на области значений входных переменных, в которых точность расчетов заранее не гарантирована. В качестве таких критериев можно указать критерии физичности адаптивных параметров, параметров разорванных связей и неизмеряемых выходных переменных модели. Смысл этих критериев заключается в требовании, чтобы численные значения указанных параметров после идентификации находились в диапазонах, допустимых с точки зрения физики процесса.

Действительно, пусть имеются две модели некоторой механической системы, содержащие в качестве адаптивного параметра коэффициент трения η . Допустим, в результате идентификации для первой модели получено $\eta_1 = 0.2$ при средней погрешности модели - 20%, а для второй, при максимальной погрешности модели в области эксперимента - 1% найдено $\eta_2 = -0.1$. Поскольку отрицательные значения η нефизичны, доверие ко второй модели вне области данных эксперимента, которые использовались при идентификации, будет очень низким, поэтому использование ее для оптимизации нецелесообразно.

Приведенный пример иллюстрирует становящееся общепринятым положение, согласно которому, точность модели далеко не всегда определяет ее качество. Также совершенно очевидно, что деление критериев на главные и вспомогательные носит относительный характер. Таким образом, оценка качества модели представляет собой многокритериальную задачу и построение глобального критерия должно проводиться путем свертки частных критериев, заданных с разной степенью субъективизма и имеющих различную значимость.

Информация качественного характера играет наиболее важную роль при формировании критериев физичности, поскольку при этом единственное, чем зачастую располагает исследователь - это разрозненные литературные данные и его собственное понимание физики явления. Пусть, например, некоторая модель процесса пластичного формоизменения содержит в качестве адаптивного параметра сопротивление деформации материала σ , значения которого в соответствии со справочными данными могут находиться в интервале $[\sigma_1, \sigma_2]$. При отсутствии какой-либо дополнительной информации и субъективных предпочтений исследователя критерий физичности превращается в четкое ограничение типа неравенства $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. В случае наличия качественной или количественной информации о предпочтительности различных значений σ внутри интервала для описания критерия целесообразно использовать функцию желательности.

Аппарат теории нечетких множеств позволяет сделать более информативными также и критерии точности. С помощью функций желательности легко формализуются субъективные представления о том, как падает качество модели с ростом ее погрешности. Столь же просто описываются предпочтения по отношению к завышенным и заниженным расчетным данным. Например, пусть P_2 - измеренное значение давления металла на валки в одной из клеток прокатного стана. Тогда критерий точности модели по давлению можно описать функцией желательности, представленной на рис. 3.2. Несимметричный вид функции отражает тот факт, что завышенные расчетные давления более предпочтительны, чем заниженные, так как гарантируют от поломки рабочих валков из-за слишком больших P при внедрении разработанных с помощью модели режимов прокатки на реальном прокатном стане.

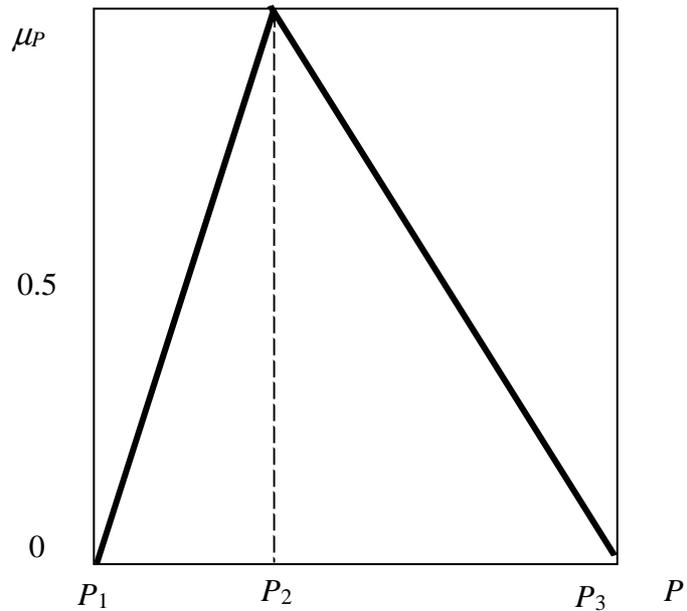


Рис. 3.2. Критерий точности расчета давления на валки

Пусть для математической модели, обобщенная формулировка которой может быть представлена в виде (3.1), имеем $\bar{X} = (x_1, \dots, x_n)$ - вектор контролируемых входных переменных; $\bar{Y} = (y_1, \dots, y_m)$ - выходные переменные, причем y_1, \dots, y_j (контролируемые выходные переменные) могут быть сравнимы с экспериментально полученными значениями $y_{1\theta}, \dots, y_{j\theta}$, остальные y_{j+1}, \dots, y_m переменные не измеряются (неконтролируемые переменные); $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ - вектор адаптивных параметров модели; $\bar{\Omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_L)$ - вектор параметров разорванных связей.

Обозначим критерии точности модели, зависящие от разностей $y_i - y_{i\theta}$ ($i = 1, \dots, j$) и формализованные с помощью соответствующих функций желательности как $C_{1j}, \dots, C_{j\theta}$. Поскольку эти критерии характеризуют точность расчета различных физических характеристик, не одинаковым образом отраженных в целях моделирования, они могут иметь разную важность с точки зрения оценки качества модели. Последнее должно быть учтено при их ранжировке.

Группу критериев, определяемых требованиями к неконтролируемым выходным переменным модели обозначим как $C_{j+1, y}, \dots, C_{m, y}$. Они могут иметь значительную важность и относятся к критериям физичности. Требования к y_{j+1}, \dots, y_m обычно заключаются лишь в том, чтобы их значения находились в физически допустимых диапазонах с возможными распределениями предпочтений внутри последних. Аналогично задаются критерии $C_{1\theta}, \dots, C_{k\theta}$, характеризующие физичность значений адаптивных параметров.

В целях упрощения изложения в дальнейшем положим, что рассматриваемые модели достаточно удобны в использовании, позволяют получать результаты при допустимых затратах машинного времени, в связи с чем, критерии, связанные с их эксплуатационными характеристиками анализироваться не будут. Тогда, вводя обозначения

$$\begin{aligned}\bar{C}_y(\bar{Y}) &= (C_{y_1}(y_1), \dots, C_{y_m}(y_m)), \\ \bar{C}_\theta(\bar{\theta}) &= (C_{\theta_1}(\theta_1), \dots, C_{\theta_k}(\theta_k)), \\ \bar{\alpha} &= (\alpha_{y_1}, \dots, \alpha_{y_m}, \alpha_{\theta_1}, \dots, \alpha_{\theta_k}),\end{aligned}$$

где $\bar{\alpha}$ - вектор коэффициентов относительной важности, обобщенный критерий качества модели D для фиксированных значений вектора входных переменных \bar{X} и вектора параметров разорванных связей $\bar{\Omega}$ представим в виде

$$D(\bar{X}, \bar{\theta}, \bar{\Omega}) = \hat{L}(C_y(\bar{Y}), C_\theta(\bar{\theta}), \bar{\alpha}) = \hat{L}(\bar{C}_y(f(\bar{X}, \bar{\theta}, \bar{\Omega})), C_\theta(\bar{\theta}), \bar{\alpha}), \quad (3.2)$$

здесь \hat{L} - некоторый оператор свертки частных критериев.

Поскольку адаптивные параметры $\bar{\theta}$ в (3.2) могут изменяться в физически допустимых диапазонах, то для оценки качества модели целесообразно выбрать экстремальное по $\bar{\theta}$ значение обобщенного критерия D

$$D_\theta(\bar{X}, \bar{\Omega}) = \max_{\bar{\theta}} \hat{L}(\bar{C}_y(f(\bar{X}, \bar{\theta}, \bar{\Omega})), C_\theta(\bar{\theta}), \bar{\alpha}). \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что поиск максимума D следует проводить с учетом физичности адаптивных параметров.

Конкретизация оператора свертки критериев \hat{L} должна проводиться с учетом способа формализации частных критериев и требований к оптимальности в глобальном смысле. При описании частных критериев функциями желательности (допуская их вырождение в обычные четкие ограничения типа неравенств) и требованиях к модели в максимальной степени удовлетворять как критериям точности, так и физичности, обобщенный критерий качества в соответствии с результатами главы II можно представить в виде

$$\begin{aligned}
D_{\theta}(\bar{X}, \bar{Q}) &= \min(\mu_{C_{1y}}^{\alpha_{1y}}, \dots, \mu_{C_{my}}^{\alpha_{my}}, \mu_{C_{1\theta}}^{\alpha_{1\theta}}, \dots, \mu_{C_{k\theta}}^{\alpha_{k\theta}}) \\
\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_{i\theta} &= 1, \\
\alpha_{1y}, \dots, \alpha_{my}, \alpha_{1\theta}, \dots, \alpha_{k\theta} &> 0,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\mu_{C_{1y}}, \dots, \mu_{C_{k\theta}}$ - функции желательности критериев.

Введенный глобальный критерий качества математической модели зависит лишь от ее точности и физичности, т.е. определяется только внутренне присущими данной модели свойствами. При необходимости круг частных критериев оценки качества модели может быть легко расширен. Например, можно ввести критерий C_b , зависящий от затрат машинного времени на реализацию модели и аналогичный критерий, характеризующий ее сложность. После формализации с помощью подходящих функций желательности эти критерии могут быть включены в свертку (3.4).

3.1.3. Обобщенная формулировка задачи структурно-параметрической идентификации

Свертка частных критериев точности и физичности (3.4) служит основой для построения оценок качества моделей на базе всего множества полученных в опыте значений векторов входных контролируемых переменных с учетом варьирования параметров разорванных связей в заданных диапазонах. Это требует решения вопросов агрегирования оценок вида (3.4) на всей области эксперимента $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_N$, учета различной вероятности реализации тех или иных условий проведения опыта и пригодности их для оценки качества моделей, а также влияния параметров разорванных связей.

Центральное место занимают вопросы агрегирования оценок качества моделей, получаемых при различных формах обобщенного критерия, и для различных наборов оптимальных значений адаптивных параметров $\bar{\theta}$, представляющие в совокупности проблему структурно-параметрической идентификации.

Пусть $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N$ - множество точек эксперимента, $D_{1\theta}, D_{2\theta}, \dots, D_{N\theta}$ - значения обобщенных критериев вида (3.4) в этих точках при некотором заданном векторе разорванных связей $D_{i\theta} = D_{\theta}(\bar{X}_i, \bar{Q}), \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_N$ - векторы адаптивных параметров, максимизирующие D_i в точках опыта. Очевидно, гипотетическая «идеальная», абсолютно верная модель должна в максимальной степени удовлетворять всем частным критериям и ограничениям, функции желательности которых в этом случае должны принимать

максимальные значения, равные единице. Тогда из (3.4) следует, что для "идеальной" модели выполняется $D_{u,i\theta}(\bar{X}_i, \bar{Q}) = 1$, $i = 1, \dots, N$. Для любой реальной модели $D_{i\theta} \leq D_{u,i\theta}$, причем, чем ближе оценки $D_{i\theta}$ к $D_{u,i\theta}$, тем выше качество исследуемой модели в точке \bar{X}_i . Поэтому $D_{i\theta}$ можно рассматривать как меру близости модели к "идеальной" в i -ой точке опыта, что позволяет ввести в области эксперимента нечеткое множество $DD = \{D_{i\theta}/\bar{X}_i\}$, $i = 1, \dots, N$, в котором $D_{i\theta}$ можно интерпретировать как степень принадлежности точки \bar{X}_i области эффективности модели, или как степень удовлетворения требований к модели в точке \bar{X}_i . Тогда, используя принципы лингвистической аппроксимации [47], нечеткому множеству DD можно поставить в соответствие утверждение "модель адекватна на множестве эксперимента $\{\bar{X}_i\}$, $i = 1, \dots, N$ ". Поскольку адекватность в нашем случае включает требования физичности, то высокая оценка качества модели на множестве $\{\bar{X}_i\}$ дает серьезные основания судить о ее работоспособности и в более широкой области значений входных контролируемых переменных.

Поскольку $D_{i\theta} \leq 1$, утверждение об адекватности модели имеет относительный характер. Поэтому, используя лингвистическую интерпретацию нечеткого множества DD , можно ввести оценку качества модели на $\{\bar{X}_i\}$, опираясь на количественный эквивалент степени определенности (истинности) высказывая об адекватности модели. Для этого можно воспользоваться мерой нечеткости, введенной Р.Егером [330]. Однако использование напрямую предложенных им выражений (1.24), (1.25) приводит к противоречиям, так как степени определенности прямого и обратного утверждений об адекватности модели на множестве $\{\bar{X}_i\}$ оказываются равными.

Поскольку $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, выражение (1.24) при $p = 1$ в нашем случае можно представить в виде

$$D_p(DD) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N |2D_{i\theta} - 1| \right). \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что для полностью адекватной модели ($D_i = 1$), и для совершенно непригодной ($D_i = 0$), для D_p получаем одно и то же численное значение. Опуская в (3.5) операцию взятия абсолютной величины, можно получить разные по знаку оценки определенности прямого и обратного высказывания, однако это также не решает проблему из-за трудностей разумной интерпретации отрицательных значений меры определенности.

Поэтому (3.5) целесообразно преобразовать таким образом, чтобы для "идеальной" модели $D_P(DD)$ равнялось единице, для абсолютно непригодной - нулю.

Легко видеть, что этим требованием удовлетворяет соотношение

$$D_P(DD) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left((2D_{i\theta} - 1) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.6)$$

получаемое из (3.5) с помощью линейного преобразования и исключения операции взятия модуля. Нетрудно заметить, что (3.6) есть не что иное, как среднее по нечеткому множеству значение функции принадлежности

$$D_P(DD) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{i\theta}. \quad (3.7)$$

Таким образом, мера определенности высказывания об адекватности модели оценивается как среднее на множестве данных опыта значение функции принадлежности точек эксперимента области эфферентности модели. Выражение (3.7) можно также интерпретировать как меру близости рассматриваемой модели к идеальной.

Отметим, что оценки вида (3.7) не всегда оказываются достаточными для правильного выбора лучшей модели. Так пусть на множестве точек эксперимента $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_N$ сравниваются модели Z_1 и Z_2 , причем для первой из них $D_{Z_1}(\bar{X}_i) = 1$ при $i = 1, 3, 5, \dots$ и $D_{Z_1}(\bar{X}_i) = 0$ при $i = 2, 4, 6, \dots$, а для второй $D_{Z_2}(\bar{X}_i) = 1/2$ при $i = 1, 2, \dots, N$. Очевидно, качество этих моделей будет разным, несмотря на то, что оценки $D_P(DD)$, вычисленные по (3.7), для них равны. Поэтому желательно, чтобы модель была адекватной как в среднем, так и равномерно по \bar{X}_i .

Однако, эти требования, представленные в количественной форме, трудно сопоставимы в предельных случаях, когда $D_i \approx 0$ и разброс D_i мал, а также при больших D_i и, одновременно, больших разбросах. В таких случаях в дополнение к оценке (3.7) можно использовать критерий $D_{1,2}(Z_1, Z_2)$, равный отношению числа точек, в которых одна модель лучше другой. При этом информация о том, насколько одна из моделей лучше или хуже другой в точках \bar{X}_i не должна использоваться в $D_{1,2}(Z_1, Z_2)$, так как она уже учтена неявно в оценках типа (3.7).

Критерий, обладающий такими свойствами, представим в виде

$$D_{1,2}(Z_1, Z_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\left(1 - \text{sign}(D_{Z_1}(\bar{X}_i) - D_{Z_2}(\bar{X}_i)) \right) / 2 \right). \quad (3.8)$$

Оценки типа (3.7) и (3.8) могут быть тем или иным образом свернуты для построения агрегированного критерия качества модели. При использовании пассивного эксперимента может оказаться, что условия проведения каждого из $i = 1, \dots, N$ экспериментов характеризуются вероятностью их реализации P_i . С другой стороны, опыты могут проводиться в разное время, с разной точностью и полнотой измерений при различной степени контроля за влиянием внешних воздействий и т.д., причем, анализ этих обстоятельств, при необходимости, может быть обобщен путем формирования функции $\mu(\bar{X}_i)$, $i = 1, \dots, N$, имеющей смысл степени принадлежности \bar{X}_i "хорошо проведенным экспериментам". Тогда $D'_{i\theta} = \min(\mu(\bar{X}_i), D_{i\theta})$ - можно рассматривать как степень принадлежности \bar{X}_i "хорошим экспериментам", в то же время подтверждающим модель.

В этом случае, используя правила оперирования характеристиками неопределенностей статистической и нечеткой природы (1.33), обобщая (3.7), получим

$$D_p(DD) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i \min(\mu(\bar{X}_i), D_{i\theta}).$$

В последнем выражении учтена зависимость меры определенности высказывания об адекватности условий проведения экспериментов от вероятности их реализации.

Оценка качества модели может быть проведена также в случае отсутствия измеренных значений вектора выходных переменных \bar{Y} . Для этого требуется задание диапазона возможных изменений контролируемых переменных, критериев физичности моделей, а также значений выходных переменных \bar{Y}_{ni} , заведомо нереализуемых при используемом наборе \bar{X}_i , $i = 1, \dots, N$. Тогда критерий точности модели можно сформулировать как степень близости рассчитанных значений выходных переменных к \bar{Y}_{ni} . Используя их совместно с заданными критериями физичности, из выражений (3.4), (3.7) получается некоторая оценка качества модели D_p . При этом способе формирования критериев точности менее адекватные модели будут обеспечивать большие значения критерия D_p , т.е. обеспечивать близость расчетных данных к физически нереализуемым значениям при адаптивных параметрах, удовлетворяющих критериям физичности.

Все предыдущие рассуждения и выводы касались случая заданного вектора параметров разорванных связей $\bar{\Omega}$. Ранее указывалось, что оценка качества моделей должна проводиться на всем диапазоне допустимых изменений $\bar{\Omega}$ с учетом возможных предпочтений внутри него. Рассмотрим некоторую модель Z , с вектором разорванных связей $\bar{\omega}$, значения которого находятся в области $\bar{\Omega}$. Пусть $\mu(\bar{\omega})$ - функция, численно характеризующая предпочтительность тех или иных значений вектора $\bar{\omega}$ для оценки качества модели Z . Тогда, интерпретируя критерии вида (3.7) как функции принадлежности нечеткого множества адекватных моделей типа Z , зависящих от параметров $\bar{\omega}$, и используя правила оперирования с условными нечеткими множествами (глава 1), получим

$$D_{\Omega}(Z) = \sup_{\bar{\omega} \in \bar{\Omega}} \min(\mu(\bar{\omega}), D_p(Z/\bar{\omega})). \quad (3.9)$$

Оценка (3.9) наиболее удобна в тех ситуациях, когда предполагается автономное использование модели Z . В этом случае, после выбора наилучшей модели в неё следует подставлять значения $\bar{\omega}$, максимизирующие правую часть (3.9). Ясно, что при этом параметры разорванных связей играют ту же роль, что и адаптивные параметры.

Если предполагается использование модели Z в качестве подмодели более общей системы, изменяющей в процессе функционирования значения $\bar{\omega}$, оценку качества $D_{\Omega}(Z)$ следует рассчитывать как математическое ожидание $D_p(Z/\bar{\omega})$ на множестве $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$

$$D_{\Omega}(Z) = \left(\int_{\bar{\Omega}} \mu(\bar{\omega}) D_p(Z/\bar{\omega}) d\bar{\omega} \right) / \int_{\bar{\Omega}} d\bar{\omega}. \quad (3.10)$$

В случае дискретного множества $\bar{\Omega}$ выражение (3.10) примет вид

$$D_{\Omega}(Z) = \sum_{i=1}^L \mu(\bar{\omega}_i) D_p(Z/\bar{\omega}_i). \quad (3.11)$$

Как показано выше, оценка качества модели может проводиться с использованием самых разнообразных вариантов формирования глобального критерия. Кроме описанных сверток (3.8)-(3.10) можно рассматривать их модификации, основанные на применении аддитивного или мультипликативного способов агрегирования частных критериев в (3.3).

При этом идентичные по способу построения глобальные критерии можно рассматривать как самостоятельные оценки, если они основаны на экспериментальных данных, полученных в разное время с различной полнотой. Поэтому, как и в случае задач многокритериальной оптимизации, возникает проблема агрегирования информации, получаемой с помощью различных способов формирования обобщенного критерия.

Положим, что имеется K таких разных критериев $D_{\Omega Z}^i(Z), i = 1, \dots, K$ для M конкурирующих моделей $Z_j, j = 1, \dots, M$. Пусть $\mu(D_i)$ - функция предпочтительности, описывающая субъективные представления лица, принимающего решения о степени близости способа формирования глобального критерия D_i гипотетическому наилучшему варианту оценки качества модели, который отвечает всем априорным требованиям, даже не сформулированным на вербальном уровне. Тогда "идеальный" вариант глобального критерия, аналогично (2.10), представим через его свойства в виде нечеткого множества типа 2

$$D_u = \left\{ \frac{\mu(D_i)}{D_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.12)$$

Далее, каждый из D_i , в свою очередь, представим как нечеткое подмножество, заданное на множестве конкурирующих моделей

$$D_i = \left\{ \frac{D_{\Omega Z_j}(Z_j)}{Z_j} \right\}, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.13)$$

где $D_{\Omega Z_j}(Z_j)$ - степень адекватности модели Z_j глобальному критерию типа D_i , оцененному на множестве параметров разорванных связей.

Учитывая, что в такой постановке задачи D_u является нечетким множеством типа 2, получим

$$D_u = \left\{ \frac{\mu_u(Z_j)}{Z_j} \right\}, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.14)$$

где

$$\mu_i(Z_j) = \max_i \left(\mu(D_i) D_{i\Omega}^j(Z_j) \right), \quad i=1, \dots, K. \quad (3.15)$$

Из (3.14) следует, что $\mu_i(Z_j)$ - степень принадлежности модели Z_j математическим моделям, удовлетворяющим идеальному критерию качества $D_{i\Omega}$. Очевидно, наилучшей будет модель, максимизирующая функцию $\mu_i(Z_j)$, как в наибольшей степени удовлетворяющая идеальному критерию качества.

После выбора наилучшей модели встает естественный вопрос об оценке адаптивных параметров этой модели. Для решения этой проблемы воспользуемся известными методами параметрической идентификации. На этапе выбора модели, т.е. в процессе структурной идентификации, используя описанную выше методику, получим информацию, достаточную для оценки параметров.

Пусть Z - модель, признанная наиболее адекватной и пусть θ_k - одна из компонент вектора адаптивных параметров, подлежащая идентификации. Тогда, если оценка качества модели на множестве параметров разорванных связей проводилась по формуле (3.9), то идентифицированное значение θ_k можно найти как математическое ожидание на множестве оценок модели в точках экспериментов

$$\theta_k(\bar{\omega}_M) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N D_{i\theta}(\bar{X}_i, \bar{\omega}_M)} \sum_{i=1}^N \theta_{ik}^M D_{i\theta}(\bar{X}_i, \bar{\omega}_M) P_i, \quad (3.16)$$

где $\bar{\omega}_M$ - вектор параметров разорванных связей, максимизирующий правую часть (3.9); θ_{ik}^M - значения адаптивного параметра θ_k , входящего в вектор $\bar{\theta}_i$, максимизирующий правую часть (3.4) в точке \bar{X}_i .

В тех случаях, когда для оценки качества модели используется выражение (3.10), значения θ_k находятся как свертка (3.16) на множестве параметров разорванных связей

$$\theta_k = \frac{1}{D_\Omega(Z)} \sum_{i=1}^L \theta_k(\bar{\omega}_i) \mu(\bar{\omega}_i) D_P(Z/\bar{\omega}_i), \quad (3.17)$$

где $D_{\Omega}(Z)$ рассчитывается по формуле (3.11), $\theta_k(\bar{\omega}_i)$ по (3.16) при замене $\bar{\omega}_M$ на $\bar{\omega}_i$, $D_p(Z/\bar{\omega}_i)$ из выражения (3.7). Вывод формулы для оценки θ_k в случае непрерывного изменения $\bar{\omega}$ аналогичен и не вызывает затруднений.

Из (3.16), (3.17) следует, что в рамках предлагаемого подхода оценка параметров проводится с учетом пригодности различных точек эксперимента для идентификации через оценку качества моделей в этих точках. Это в итоге делает данную методику структурно-параметрической. В этом смысле ее можно рассматривать как некоторое обобщение традиционных методов идентификации.

Основные идеи описанного подхода могут быть использованы для разработки методики структурной идентификации упрощенных математических моделей второго типа, когда в качестве базиса сравнения используется не эксперимент, а результаты расчетов по некоторой более полной модели первого типа. Ясно, что последняя должна быть основой всех сравниваемых упрощенных моделей, получаемых из нее путем редукции.

Рассмотрим случай, когда "полная" и упрощенные модели имеют равное число идентичных по физическому смыслу параметров и переменных. Пусть имеются базовая модель первого типа с известными диапазонами изменения векторов $\bar{X}, \bar{\theta}, \bar{\Omega}$, структура которой может быть формально представлена в виде (3.1), и совокупность упрощенных моделей

$$\bar{Y}_i = f(\bar{X}, \bar{\theta}_i, \bar{\Omega}_i), \quad i = 1, \dots, L. \quad (3.18)$$

Структурная идентификация сводится к отысканию модели f_i , наиболее близкой по своим свойствам к исходной "полной" модели, следовательно, для одних и тех же значения вектора \bar{X} наилучшая приближенная модель должна давать минимальную невязку \bar{Y} и \bar{Y}_j при максимальной близости векторов $\bar{\theta}$ и $\bar{\theta}_j$, $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_j$. Покроем пространство $\bar{\theta} \times \bar{\Omega}$ достаточно густой сетью точек $\bar{\theta}_k, \bar{\Omega}_k$, $k = 1, \dots, N$, на которой можно ввести функцию желательности $\mu_k(\bar{\theta}_k, \bar{\Omega}_k)$, являющуюся сверткой критериев физичности значений $\bar{\theta}$ и $\bar{\Omega}$. Тогда, представляя критерий точности f_i , как некоторую функцию желательности, зависящую от невязки \bar{Y} и \bar{Y}_j , а критерий физичности, как функцию невязок $\bar{\theta}$ и $\bar{\theta}_j$, $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_j$, получим локальную оценку качества в виде некоторой функции $D_{ik}(\bar{X})$ путем максимизации в пространстве $\bar{\theta}_i \times \bar{\Omega}_i$ свертки всех частных критериев.

Сворачивая $D_{ik}(\bar{X})$ по \bar{X} , найдем общую оценку D_{ikx} , усредняя которую в пространстве $\bar{\theta} \times \bar{\Omega}$, аналогично (3.7), окончательно получим

$$D_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D_{ikx} \mu_k . \quad (3.19)$$

Лучшая модель будет характеризоваться наибольшими значениями D_i , обеспечивая максимальное удовлетворение сформулированным критериям точности и физичности с учетом их ранжировки.

Нередко "полные" модели и их упрощенные аналоги имеют разное число адаптивных параметров и параметров разорванных связей. В этих случаях целесообразно ввести все несовпадающие компоненты векторов $\bar{\theta}$, $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_i$ (не присутствующие одновременно в "полной" модели f и в приближенных f_i) в вектор параметров разорванных связей $\bar{\Omega}$. Компоненты $\bar{\theta}_i$, не входящие в f , следует рассматривать как адаптивные параметры моделей f_i . При этом в качестве дополнительного критерия при оценке моделей f_i можно ввести требование максимальной стабильности значений $\bar{\theta}_i$ в точках экстремума при варьировании вектора входных переменных.

Описанная методика структурной идентификации может оказаться полезной в тех случаях, когда объем экспериментальных данных недостаточен для проведения структурно-параметрической идентификации. В некоторых ситуациях хорошие результаты могут быть получены при объединении двух методик. Разработанные методики обладают достаточной гибкостью и сравнительно легко адаптируются к специфическим условиям конкретных задач.

§ 3.2. Моделирование и многокритериальная оптимизация процесса нагрева стальных слитков под прокатку

В качестве первого примера практической реализации описанной общей методологии моделирования и оптимизации рассмотрим задачу многокритериальной оптимизация качества процесса нагрева слитков перед прокаткой на стане 850 Белорусского металлургического завода [41].

Нагрев слитков осуществляется в методических газовых печах. Методическая печь с шагающими балками стана 850 предназначена для нагрева непрерывно-литых блюмов сечением 250x300 и 300x400 мм длиной от 2.5 до 5.5 м при шаге раскладки соответственно 150 и 200 мм. Общая длина печи 23 м. По расположению горелок она разделена на семь

участков, которые можно поделить на методическую, две сварочные и томильную зоны. Методическая зона печи неотопливаемая, сталь прогревается за счет теплоты дымовых газов, поступающих из высокотемпературных зон.

В связи с широким распространением автоматизированных систем управления процессами нагрева заготовок появилась необходимость в получении большого количества данных об изменении теплового и термомеханического состояний заготовок в печи. Создание экономичных режимов нагрева металла на действующих печах требует проведения большого числа экспериментов, что связано со значительными затратами труда, времени и средств. Вследствие этого решающее значение приобретают методы математического моделирования и оптимизации процессов нагрева металлов в проходных печах.

Математическая модель для расчета параметров качества нагрева слитков перед прокаткой [42] включает в себя:

- двумерное уравнение нестационарной теплопроводности в частных производных с граничными условиями третьего и четвертого рода;
- уравнение для расчета толщины образовавшейся окалины;
- систему уравнений для расчета термических напряжений.

Модель реализуется численно при использовании комбинации методов конечных разностей и конечных элементов.

Тепловая часть модели содержит неопределенные параметры: коэффициент конвективного теплообмена слитка с греющей средой, который в соответствии с литературными данными принимался равным $30 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, и приведенный коэффициент излучения поверхности слитка - a , идентифицированный с помощью эксперимента. В результате идентификации получили значения a , изменяющиеся от зоны к зоне в пределах $1.7 \div 1.9 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}^4)$ и обеспечивающие высокую точность расчета температур в нагреваемом слитке.

Уравнение для расчета толщины образовавшейся окалины δ принимали в виде [52]:

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \frac{(\exp(-10125/T(\tau) + 7.25))^2}{2\delta},$$

где $T(\tau)$ – температура поверхности слитка.

Для оценки опасности возникновения трещин в слитке наряду с полем напряжений рассчитывали коэффициенты напряженного состояния $K_\sigma = (\sigma_i - \sigma_T(T)) / \sigma_T(T)$, где σ_i – интенсивность напряжений, σ_T – разрушающие напряжения. Рассчитанные для

форсированного режима изолинии K_{σ} показали, что растягивающие напряжения, возникающие в слитке в процессе нагрева, не достигают критических значений, приводящих к возникновению трещин. С точки зрения постановки и решения задачи оптимизации, полученный результат важен тем, что позволяет исключить из рассмотрения коэффициент напряженного состояния слитка как критерий качества процесса.

В итоге качество процесса оценивалось по трем основным частным критериям: минимизации толщины окалины, точности нагрева T и минимизации максимального перепада температур в слитке в момент выгрузки ΔT .

Функции желательности частных критериев качества процесса выбраны в виде, представленном на рис. 3.3.

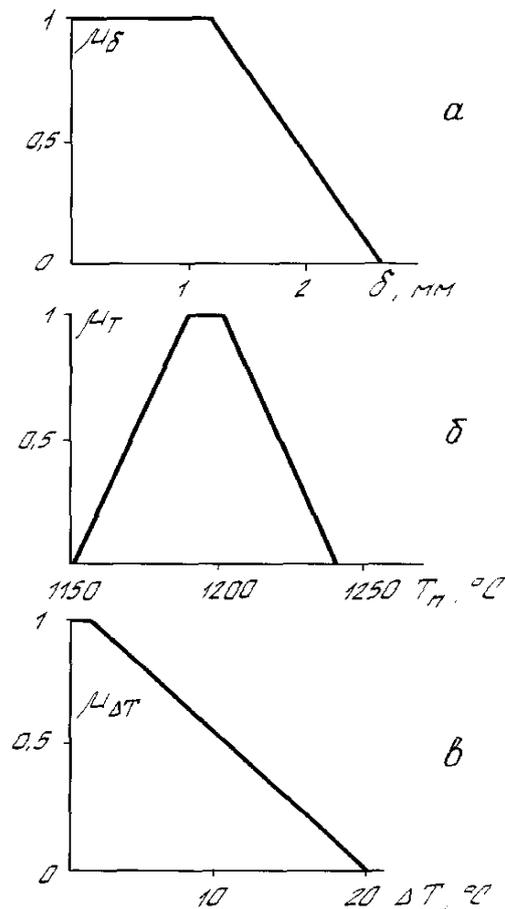


Рис. 3.3. Функции желательности критериев: а – по толщине окалины; б – по конечной температуре металла, в – по максимальному перепаду температур

Функция желательности критерия качества толщины окалины (рис 3.3а) означает, что допустимая ее толщина не должна превышать 1,3 мм. Толщина окалины свыше 2,5 мм,

неприемлема и функция желательности этого параметра линейно падает от 1 при 1,3 мм до 0 при 2,5 мм. Функция желательности критерия точности нагрева (рис. 3.3, б) отвечает ситуации, когда оптимальные температуры широкой грани слитка находятся в области $1190^{\circ}\text{C} \leq T \leq 1200^{\circ}\text{C}$. Температуры $T \leq 1150^{\circ}\text{C}$ или $T \geq 1250^{\circ}\text{C}$ недопустимы из технологических соображений. Промежуточные участки характеризуются монотонным убыванием функции желательности при приближении T к области недопустимых значений. Линейный закон убывания принят только из соображений простоты. При наличии какой-либо дополнительной информации о поведении функции желательности в промежуточных областях закон убывания может быть изменен. Аналогично построена зависимость для желательности критерия максимального перепада температур (рис 3.3в).

Реперные точки функции желательности критериев по толщине окалины и перепаду температур по толщине слитка при выгрузке были найдены на основе информации, полученной в численных экспериментах при варьировании переменных в областях допустимых значений.

Глобальный критерий качества был сконструирован на основе максиминной формулировки задачи оптимизации:

$$D = \min(\mu_{\delta}^{\alpha_1}, \mu_T^{\alpha_2}, \mu_{\Delta T}^{\alpha_3}). \quad (3.20)$$

Ранжировка локальных критериев по методике, описанной в главе 2, дала следующие значения коэффициентов относительной важности частных критериев: $\alpha_1 = 0.23$; $\alpha_2 = 1.43$; $\alpha_3 = 1.34$.

Решение задачи многокритериальной оптимизации сводилось к отысканию оптимальных тепловых режимов работы печи, обеспечивающих максимизацию глобального критерия качества D для различных производительностей печи P и температур загрузки в нее металла T_o . Оптимизируемыми характеристиками являлись температуры первой T_1 и второй T_2 сварочных зон. Температуры в томильной зоне печи $T_m = 1200^{\circ}\text{C}$ и в начале неотапливаемой зоны $T_n = 700^{\circ}\text{C}$ полагались неизменными. В итоге для каждой фиксированной пары P и T_o задача сводилась к отысканию оптимальных температур сварочных зон T_1 и T_2 . Изменение температур в пределах каждой из зон полагалось линейным.

Использование для решения задачи оптимизации математической модели, представляющей собой систему дифференциальных уравнений второго порядка в частных

производных, требует чрезвычайно больших затрат машинного времени. Для сокращения вычислений применялся двухэтапный подход. На первом этапе с использованием методов планирования эксперимента проводилась редукция исходной модели к эмпирико-статистической. Для этого использовались две серии численных экспериментов с исходной моделью при варьировании четырех факторов P , T_0 , T_1 , T_2 в технологически допустимых диапазонах. В первой серии экспериментов значения T_0 варьировали в пределах $20\div 400^\circ\text{C}$ (холодный посад), во второй серии значения T_0 изменялись в пределах $550\div 700^\circ\text{C}$ (горячий посад). В результате обработки данных численных экспериментов для холодного посада получены статистические модели в виде регрессионных зависимостей:

$$\begin{aligned} \delta = & 1.7 - 1.73 \cdot 10^{-2} x_4 + 4.1 \cdot 10^{-3} x_2 + 3 \cdot 10^{-3} x_1 + 2 \cdot 10^{-4} x_4^2 - 3.66 \cdot 10^{-5} x_2 x_4 - \\ & - 2.687 \cdot 10^{-5} x_1 x_4 + 7.736 \cdot 10^{-6} x_1^2 + 7.387 \cdot 10^{-6} x_2^2 - 1.2 \cdot 10^{-6} x_1 x_2 - \\ & - 2.1 \cdot 10^{-7} x_2 x_3 + 3.12 \cdot 10^{-6} x_3 + 8.71 \cdot 10^{-8} x_1 x_3 + 1.43 \cdot 10^{-7} x_3 x_4. \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} T = & 1205 + 0.265 x_2 - 0.37 x_4 - 1.177 \cdot 10^{-2} x_4^2 + 5.75 \cdot 10^{-2} x_1 + 2.5 \cdot 10^{-3} x_1 x_4 + \\ & + 2.2 \cdot 10^{-3} x_2 x_4 + 5 x_3 + 3.1 \cdot 10^{-4} x_3 x_4 - 6.2 \cdot 10^{-5} x_1^2 - 4.8 \cdot 10^{-6} x_3^2 - \\ & - 9.1 \cdot 10^{-5} x_1 x_2 - 1.1 \cdot 10^{-5} x_1 x_3 + 5.4 \cdot 10^{-5} x_2^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta T = & 9.87 - 1.17 \cdot 10^{-2} x_2 x_4 + 2.9 \cdot 10^{-3} x_4^3 - 3 \cdot 10^{-3} x_1 x_4 - 3.24 \cdot 10^{-6} x_1^2 x_3 + \\ & + 1.58 \cdot 10^{-3} x_1 x_2 - 1.7 \cdot 10^{-4} x_1 x_4^2 + 6.3 \cdot 10^{-5} x_1 x_2 x_4 - 4.3 \cdot 10^{-4} x_3 x_4 + \\ & + 8.66 \cdot 10^{-5} x_2^3 - 3.9 \cdot 10^{-4} x_2 x_4^2 - 1.06 x_4 + 6.27 \cdot 10^{-5} x_2^2 x_4 - 1.2 \cdot 10^{-5} x_3 x_4^2 + \\ & + 2 \cdot 10^{-5} x_1 x_2^2 + 7.88 \cdot 10^{-6} x_2 x_3 x_4 + 5.5 \cdot 10^{-5} x_1 x_3 + 3.75 \cdot 10^{-6} x_1 x_2 x_3 + \\ & + 1.16 \cdot 10^{-4} x_2 x_3 + 2.94 \cdot 10^{-4} x_1^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В выражениях (3.21) – (3.23): $x_1 = T_1 - 1195$; $x_2 = T_2 - 1235$; $x_3 = T_0 - 217.3$; $x_4 = P - 59.6$.

Для горячего посада получено:

$$\begin{aligned} \delta = & 1.8 - 1.22 \cdot 10^{-2} x_4 + 3.78 \cdot 10^{-3} x_2 + 4.78 \cdot 10^{-4} x_1 + 1.3 \cdot 10^{-4} x_4^2 - \\ & - 3.326 \cdot 10^{-5} x_2 x_4 - 4.7 \cdot 10^{-6} x_1 x_4 + 1.38 \cdot 10^{-6} x_1^2 + 6.9 \cdot 10^{-6} x_2^2 + \\ & + 4.3 \cdot 10^{-7} x_2 x_3 + 9.47 \cdot 10^{-7} x_1 x_2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} T = & 1180 + 0.295 x_2 - 1.085 x_4 - 1.143 \cdot 10^{-2} x_4^2 + 7.4 \cdot 10^{-2} x_1 + 2.68 \cdot 10^{-3} x_1 x_4 + \\ & + 2.774 \cdot 10^{-3} x_2 x_4 + 1.88 \cdot 10^{-2} x_3 + 9.63 \cdot 10^{-4} x_3 x_4 - 5.1 \cdot 10^{-5} x_1^2 - 9.9 \cdot 10^{-5} x_1 x_2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta T = & 37.47 - 3.7 \cdot 10^{-3} x_2 x_4 + 1.8 \cdot 10^{-2} x_4^3 - 0.126 x_1 - 0.39 x_2 - 4.7 \cdot 10^{-3} x_1 x_4 - \\ & - 5.36 x_4 - 3.9 \cdot 10^{-6} x_3^3 - 1.7 \cdot 10^{-3} x_3 x_4 + 8.4 \cdot 10^{-5} x_1^2 + 8.84 \cdot 10^{-5} x_2 x_4^2 - \\ & - 1.34 \cdot 10^{-6} x_1 x_2 x_3 + 1.65 \cdot 10^{-4} x_1 x_2 - 3.2 \cdot 10^{-5} x_3 x_4^2 + 6.53 \cdot 10^{-5} x_1 x_3 + \\ & + 1.34 \cdot 10^{-6} x_1^2 x_4 - 1.44 \cdot 10^{-5} x_1 x_4^2 + 2.18 \cdot 10^{-6} x_1 x_3 x_4 + 3.87 \cdot 10^{-6} x_1 x_2 x_4 - \\ & - 4.5 \cdot 10^{-5} x_3^2 + 8.3 \cdot 10^{-5} x_2 x_3. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В выражениях (3.24) – (3.26): $x_1 = T_1 - 837$; $x_2 = T_2 - 1211$; $x_3 = T_0 - 625$; $x_4 = P - 60$.

Полученные регрессионные зависимости аппроксимируют результаты, полученные на исходной полной модели для случая нагрева стали 45, с погрешностями по выходной температуре T не выше 1%, по δ и ΔT не выше 5%. Это позволяет использовать выражения (3.21)-(3.26) при решении оптимизационной задачи вместо исходной модели, что сокращает затраты машинного времени в несколько тысяч раз.

Учитывая, что все показатели качества δ , T и ΔT зависят от факторов P , T_0 , T_1 , T_2 , глобальный критерий D представляется в виде:

$$D(P, T_0, T_1, T_2) = \min \left(\mu_{\delta}^{\alpha_1} (\delta(P, T_0, T_1, T_2)), \mu_T^{\alpha_2} (T(P, T_0, T_1, T_2)), \mu_{\Delta T}^{\alpha_3} (\Delta T(P, T_0, T_1, T_2)) \right). \quad (3.27)$$

В этом случае для каждой фиксированной пары P^*, T_0^* решением задачи оптимизации будут значения температур T_1, T_2 , максимизирующие D :

$$(T_1, T_2)_{opt} = \arg \max_{T_1, T_2} (D(P^*, T_0^*, T_1, T_2)) \quad (3.28)$$

Решение задачи оптимизации (3.28) отыскивалось методом последовательной квадратической аппроксимации [132].

Результаты решения задачи оптимизации для холодного посада сведены в таблицу 3.1.

Таблица 3.1. Результаты решения задачи оптимизации для холодного посада

$P, \text{ т/ч}$	$T_0, \text{ }^\circ\text{C}$	$T_1, \text{ }^\circ\text{C}$	$T_2, \text{ }^\circ\text{C}$	$\delta, \text{ мм}$	$T, \text{ }^\circ\text{C}$	$\Delta T, \text{ }^\circ\text{C}$	μ_{δ}	μ_T	$\mu_{\Delta T}$	D
60	100	1194	1242	1.33	1206	9.41	0.91	0.85	0.56	0.46
	200	1134	1257	1.46	1207	9.29	0.82	0.82	0.56	0.46
	300	976	1249	1.63	1193	1.64	0.69	1	0.97	0.46
	400	1011	1221	1.71	1189	1.22	0.63	0.99	0.99	0.48
80	100	1245	1260	1.34	1204	4.44	0.90	0.89	0.82	0.98
	200	1299	1236	1.39	1203	2.63	0.85	0.92	0.91	0.92
	300	1076	1275	1.76	1193	1.45	0.59	1	0.48	0.47
	400	1072	1262	1.66	1189	0.62	0.67	0.98	1	0.76

Из таблицы видно, что зависимость оптимальных значений T_1 и T_2 от исходной температуры металла T_0 имеет немонотонный характер, причем каких-либо отчетливых корреляций выявить не удалось. Эффективность полученных решений иллюстрируется рис. 3.4, на котором приведена зависимость величины глобального критерия качества от температуры T_1 в окрестности оптимума (сплошная линия). Для сравнения показано аналогичное распределение в окрестности центра плана (пунктирная линия). Расчеты проводились для режима $P = 60 \text{ т/ч}$, $T_0 = 400^\circ\text{C}$, $T_1 = 1011^\circ\text{C}$ при оптимальном режиме, $T_1 = 1100^\circ\text{C}$ в центре плана.

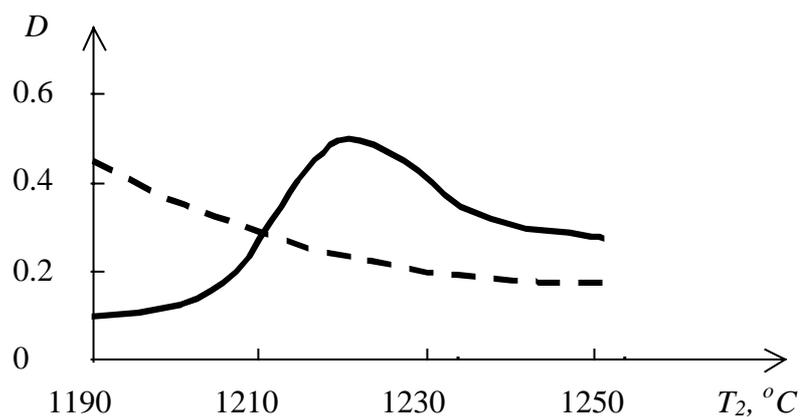


Рис. 3.4. Значения глобального критерия качества в окрестности найденного оптимума и центра плана

Из рис. 3.4 видно оптимум глобального критерия выражен весьма четко, и что оптимальное решение существенно лучше других. Это подтверждает эффективность разработанной методики многокритериальной оптимизации. Результаты решения рассмотренных задач оптимизации были использованы в технологической практике для совершенствования режимов нагрева под прокатку на Белорусском металлургическом заводе.

§ 3.3. Многокритериальная оптимизация процесса термообработки проката

Термическая обработка является последней операцией в технологической цепи производства катанки на проволочном блоке Белорусского металлургического завода. Правильный выбор режимов термообработки с учетом химического состава металла и его температуры после горячей прокатки должен обеспечить требуемые механические свойства катанки и размер зерна при ограничениях технологического характера на значения режимных параметров и процентное содержание основных компонентов состава стали.

Технологическая схема термообработки проката является двухстадийной. Она предусматривает ступенчатое водяное охлаждение в четырех секциях, расположенных между чистовой группой клетей и винтоукладчиком. Для выравнивания температурного поля по толщине проката между секциями предусмотрены разрывы (компенсационные участки). Установка режима охлаждения осуществляется включением необходимого количества форсунок в секциях водяного охлаждения. После охлаждения от температур

1010÷1070 до 750÷900°C на первой стадии прокат попадает на винтоукладчик, где бесконтактным способом измеряется его температура T , и образуются плоские витки. Далее происходит их менее интенсивное, чем на первой стадии, охлаждение воздухом на специальном транспортере.

Транспортер имеет 16 зон охлаждения, под зонами 1÷8 и 15, 16 установлены нагнетающие вентиляторы. Витки проката перемещаются роликовым транспортером в специальном туннеле, снабженном изолирующими крышками, закрывая и открывая которые можно регулировать скорость охлаждения.

В соответствии с этим, основными факторами, определяющими технологический режим термообработки катанки, являются:

относительные расходы воды в секциях водяного охлаждения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, измеряемые в процентах от максимального расхода при полном включении форсунок;

скорость движения витков по транспортеру v ;

относительное количество воздуха ε , нагнетаемого вентиляторами и измеряемое в долях максимально возможного количества;

степень охлаждения Δ , равная доле закрытых термоизолирующих крышек.

Основными показателями качества процесса являются следующие характеристики металла готовой катанки:

предел прочности σ_6 ;

относительное сужение ψ ;

относительное удлинение δ ;

размер зерна d ;

относительная толщина обезуглероженного слоя θ .

На первом этапе решения задачи оптимизации на основе данных промышленного эксперимента строилась регрессионная математическая модель, связывающая выходные показатели качества с факторами, определяющими технологический режим. Поскольку в рассматриваемом случае показатели качества во многом зависят и от исходного химического состава стали, в число варьируемых факторов включали процентное содержание основных легирующих компонентов C, Mn . Двухстадийность процесса термообработки позволила упростить его математическое описание.

Математическая модель участка водяного охлаждения первоначально отыскивалась в виде $T = f(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, где f -регрессионный полином. При этом в ходе обработки эксперимента было установлено, что более простая по структуре модель

$$T = 950.32 - 26.79\gamma$$

где $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, обеспечивает более точные результаты, чем первоначальная (максимальная погрешность этой модели 8%, исходной - 30%). Полученный результат намного упростил обработку данных, позволяя заменить всю совокупность факторов, определяющих режим водяного охлаждения, одной переменной T .

В результате обработки данных промышленных экспериментов для одной из марок стали, получены уравнения множественной линейной регрессии, связывающие входные и выходные переменные:

$$\sigma_s = 1251.74 + 0.14 \cdot T + 1336.35 \cdot C + 195.385 \cdot Mn + 1.988 \cdot \varepsilon - 1426.94 \cdot v - 1203.94 \cdot \Delta;$$

$$\delta = 0.169 - 0.00317 \cdot T - 23.55 \cdot C + 8.77 \cdot Mn + 0.0877 \cdot \varepsilon + 29.83 \cdot v + 23.97 \cdot \Delta;$$

$$\psi = 46.566 + 3.75 \cdot 10^{-3} \cdot T - 4.613 \cdot C + 26.34 \cdot Mn + 0.0814 \cdot \varepsilon - 16.327 \cdot v - 20.51 \cdot \Delta;$$

$$d = 0.349 - 3.749 \cdot 10^{-4} \cdot T - 0.1156 \cdot C + 7.429 \cdot 10^{-2} \cdot Mn - 2.8 \cdot 10^{-4} \cdot \varepsilon + 0.189 \cdot v + 0.166 \cdot \Delta;$$

$$\theta = 1.9 - 3.383 \cdot 10^{-3} \cdot T - 1.423 \cdot C - 0.357 \cdot Mn - 4.47 \cdot 10^{-2} \cdot \varepsilon + 4.496 \cdot v + 3.487 \cdot \Delta.$$

Приведенные уравнения адекватны по критерию Фишера; погрешность прогноза основных показателей качества σ_s , ψ , δ не превышает 10...15%, что говорит о достаточной точности полученных моделей. Следует отметить, что предпринятые попытки повысить адекватность модели путем построения регрессионных зависимостей второго и выше порядков не привели к значимому снижению погрешности.

Рассматриваемый процесс характеризуется наличием совокупности частных критериев качества и ограничений, которые в общем случае находятся в противоречии друг с другом, когда улучшение одного из них ведет к ухудшению другого и наоборот. Это неизбежно вносит элементы качественного, субъективного характера в постановку задачи оптимизации, в решение вопросов о компромиссе между частными критериями, об их ранжировке и свертке в обобщенный показатель качества процесса. Другим источником неопределенности являются сами частные критерии и ограничения, в создании которых неизбежно присутствует информация, основанная на опыте и интуиции лиц, ответственных за ведение процесса.

Поэтому постановка задач оптимизации осуществлялась с применением положений теории нечетких множеств [43].

Для формализации частных критериев и ограничений использовались функции желательности. На рис.3.5 представлены функции желательности наиболее важных показателей качества, отображающие, как и в рассмотренной выше задаче, усредненные требования к характеру протекания процессов.

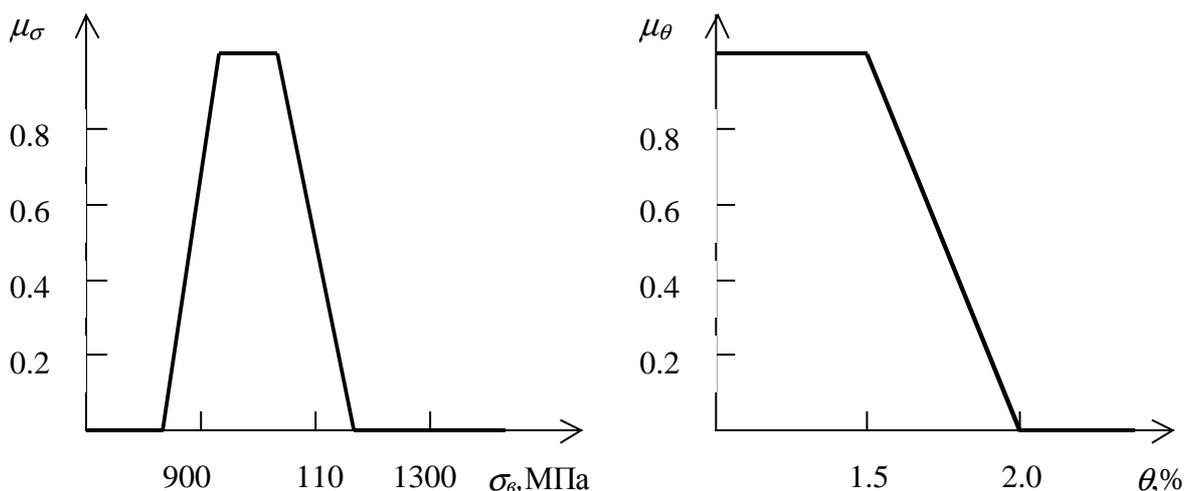


Рис. 3.5. Функции желательности частных критериев

Аналогично строились функции желательности остальных показателей качества - $\mu_\psi(\psi)$, $\mu_d(d)$, $\mu_\delta(\delta)$ и ограничений на содержание C и Mn : $\mu_C(C)$, $\mu_{Mn}(Mn)$. На варьируемые переменные T , v , ε , Δ накладывались обычные ограничения типа неравенств.

Поскольку сформулированные частные критерии и ограничения на практике удовлетворяются в различных областях изменения варьируемых параметров технологического процесса, оптимальное решение отыскивалось как некоторый компромисс противоречивых требований. Для этого частные критерии и ограничения агрегировались в обобщенный критерий качества процесса с учетом относительной важности удовлетворения различным требованиям .

Обобщенный критерий качества процесса был сконструирован в виде:

$$D(C, Mn, T, v, \varepsilon, \Delta) = \min(\mu_\sigma^{\alpha_1}(\sigma_b(T, C, Mn, v, \varepsilon, \Delta)), \mu_\delta^{\alpha_2}(\delta(T, \dots, \Delta)), \mu_\psi^{\alpha_3}(\psi(T, \dots, \Delta)), \mu_\theta^{\alpha_4}(\theta(T, \dots, \Delta)), \mu_d^{\alpha_5}(d(T, \dots, \Delta)), \mu_C^{\alpha_6}(C), \mu_{Mn}^{\alpha_7}(Mn)), \quad (3.29)$$

где $\alpha_1 \dots \alpha_7$ - коэффициенты относительной важности критериев и ограничений. Они находились с использованием лингвистической шкалы парных оценок значимости и матрицы парных сравнений в соответствии с методикой, изложенной в главе 2.

Искомая точка оптимума находилась максимизацией обобщенного критерия (3.29):

$$(C, Mn, T, \varepsilon, v, \Delta)_{opt} = \arg \max_{C, Mn, T, \varepsilon, v, \Delta} (D(C, Mn, T, \varepsilon, v, \Delta)). \quad (3.30)$$

Для отыскания максимума использовался метод последовательной квадратической аппроксимации [132], обладающий свойством сглаживания незначимых локальных экстремумов.

Первые результаты решения задачи оптимизации показали наличие ряда конкурирующих локальных оптимумов, причем каждый из них достигался при величинах ε , находящихся на верхней границе области допустимых значений. Это позволило снизить размерность факторного пространства, положив в (3.29) и (3.30) $\varepsilon = \varepsilon_{max}$, после чего было отыскано новое решение задачи оптимизации.

Результатом решения явилось сочетание семи значений технологических параметров, обеспечивающих наибольшую величину критерия D , равную 0.642.

Графическая иллюстрация зависимостей величины глобального критерия качества от значений параметров процессов в окрестности оптимума приведена на рис. 3.6, 3.7 (сплошные линии). Для сравнения приведены также значения D в окрестности центра плана эксперимента (пунктирные линии)

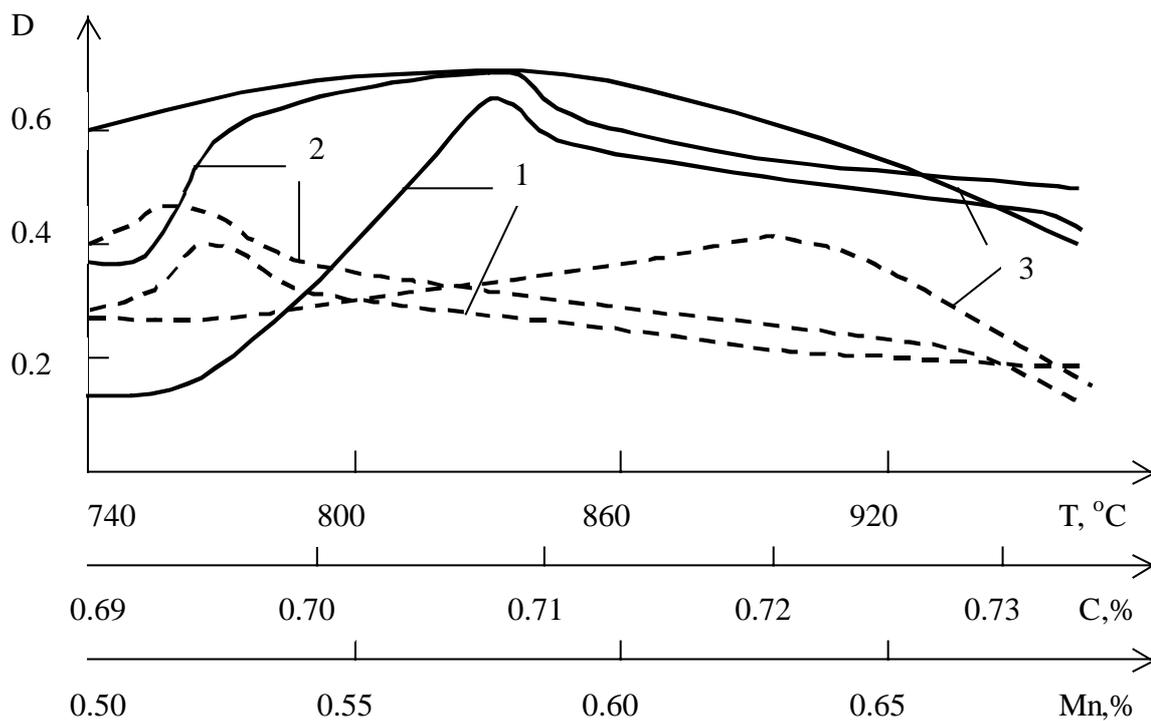


Рис 3.6. Чувствительность обобщенного критерия к вариации факторов:
 1 - $D(T)$, 2 - $D(C)$, 3 - $D(Mn)$. (Сплошные линии - в окрестностях оптимума;
 пунктирные - в окрестностях центра плана эксперимента).

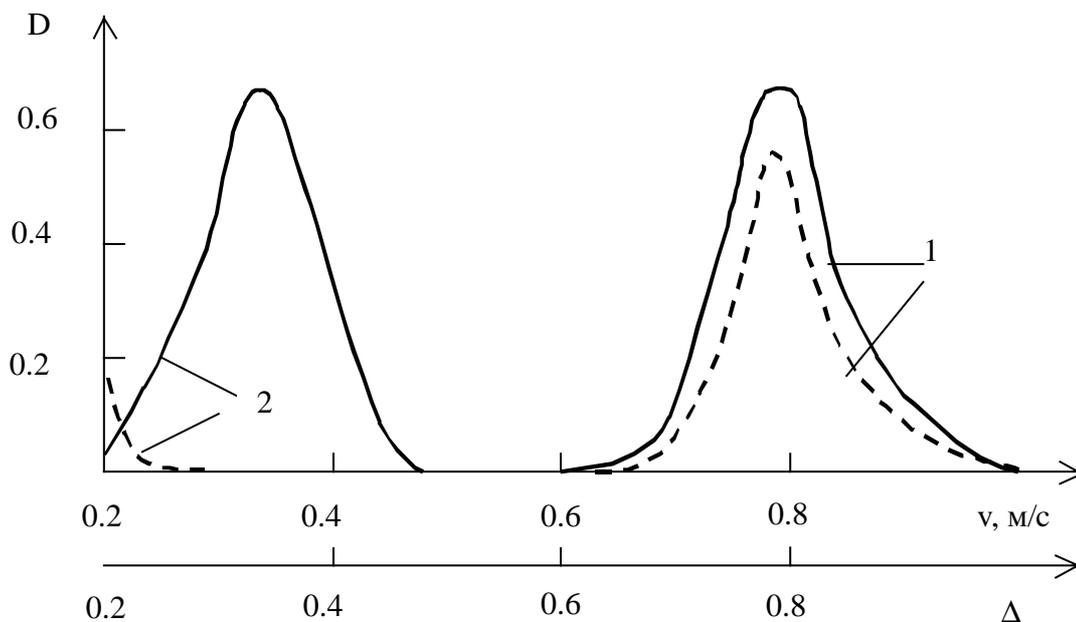


Рис 3.7 . Чувствительность обобщенного критерия к вариации факторов:
 1 - $D(v)$, 2 - $D(\Delta)$. (Сплошные линии - в окрестностях оптимума;
 пунктирные - в окрестностях центра плана эксперимента).

Видно, что разные параметры влияют на качество процесса существенно различным образом. Следует отметить слабую зависимость D в окрестностях оптимума от содержания C и Mn почти во всем диапазоне их допустимых значений и наличие широкой области изменения T , в которой критерий D также мало меняется и близок к максимуму. Из рис. 3.6 и 3.7 видно, что наибольшее влияние на значение критерия D оказывают вариации факторов ν и Δ . Их значения могут с высокой точностью поддерживаться при помощи имеющихся на участке термообработки систем автоматического регулирования. В таблице 3.2 приведены ранги и значения частных критериев качества, характеризующие вклад соответствующих параметров процесса в глобальный критерий D .

Таблица 3.2. Значения частных критериев μ и ранги относительной важности α в точке оптимума

Критерий	σ_s	δ	ψ	θ	d	C	Mn
α	2.64	1.65	1.00	0.69	0.45	0.32	0.25
μ	1.00	0.76	0.76	0.73	0.37	0.76	0.78

Результаты решения задачи оптимизации, представленные в таблице 3.2, свидетельствуют о хорошем соответствии степени удовлетворения наиболее важных частных критериев их исходной ранжировке. Видно, что данные таблицы 3.2 также характеризуют высокую значимость вклада в глобальный критерий D параметров σ и δ и низкую значимость величин C и Mn , что соответствует проведенному выше анализу. Полученные результаты использовались для совершенствования технологии термообработки проката после стана 320 Белорусского металлургического завода.

§ 3.4. Структурно-параметрическая идентификация процесса горячей прокатки алюминиевых сплавов

Объектом исследований являлся полунепрерывный стан 2800 горячей прокатки алюминиевых сплавов, состоящий из пяти клетей, в каждой из которых происходит пластическое деформирование металла. На вход линии прокатки поступают предварительно нагретые и обжатые в реверсивных клетях полосы, на выход поступает тонкая полоса, обычно сворачиваемая в рулон, являющаяся заготовкой для дальнейшей обработки. В нормальном режиме работы стана прокатываемая полоса находится одновременно во всех клетях, поскольку ее длина намного больше продольных размеров стана. Целями

моделирования являлись изучение закономерностей процесса, недоступных прямым экспериментальным исследованиям, и решение задач многокритериальной оптимизации технологического процесса на основе идентифицированных моделей.

Основными характеристиками процесса являются ограничивающие производительность энергосиловые параметры - усилия P и моменты M в клетях стана, а также связанные с ними толщина H_1 и температура полосы T_1 после очага деформации в этих клетях. Выходные переменные в каждой клетке формируются взаимосвязанными процессами в очаге деформации - пластическим формоизменением металла, вызванным этим тепловыделением и теплообменом полосы с рабочими валками. Входная температура T_{ex} определяется через выходную температуру предыдущей клетки с учетом охлаждения полосы эмульсией в межклетевом промежутке.

Стан непрерывной горячей прокатки состоит из последовательности рабочих клеток, в каждой из которых можно выделить четыре основных зоны (Рис. 3.8), характеризующих различные тепловые и деформационные процессы.

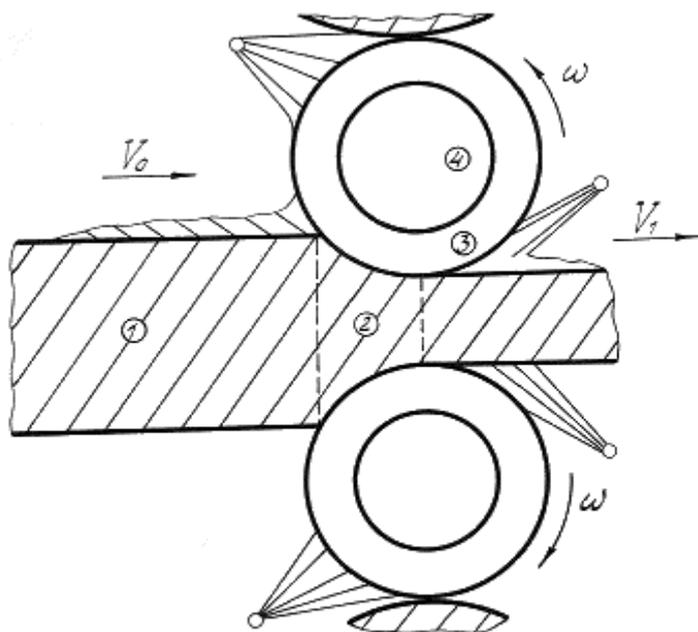


Рис. 3.8. Рабочая клетка прокатного стана

В зоне 1 осуществляется одностороннее охлаждение полосы эмульсией, в зоне 2 (очаг деформации) происходит пластическое формоизменение металла сопровождающееся тепловыделением и передачей тепла в валки.

В виду значительной скорости вращения валка ω температурное поле в основной его массе (зона 4) сохраняет осесимметричность, циклические же колебания температуры характерны лишь для сравнительно тонкой приповерхностной области (зона 3). Это явление характерное для процессов прокатки, может быть использовано для упрощения моделей.

Процесс горячей прокатки многостадийен, т.е. металл подвергается многократной деформации в рабочих клетях прокатного стана.

При этом определяющую роль играют процессы, протекающие в очаге деформации. Поэтому основное внимание уделялось построению моделей очага деформации, пригодных для их дальнейшего использования в оптимизации рассматриваемого технологического процесса.

Представленные в настоящем параграфе модели идентифицировались применительно к условиям работы стана 2800 горячей прокатки алюминиевых сплавов. Поэтому рассмотрению процессов в очаге деформации предшествует описание модели охлаждения полосы эмульсией (рис. 3.8, зона I).

В [101] экспериментальным путем выявлено, что в случае горячей прокатки алюминиевых сплавов определяющим фактором в охлаждении полосы вне очага деформации является ее теплообмен с эмульсией, влиянием остальных факторов можно пренебречь. Поэтому задачу теплообмена для каждой точки движущейся полосы вне зоны деформации сформулируем в виде

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3.31)$$

$$T|_{\tau=\tau_0} = T_0(x), \quad (3.32)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=H} = \alpha(T)(T_{жс} - T)|_{x=H}, \quad (3.33)$$

где ρ , C_p , λ - плотность, удельная теплоемкость и коэффициент удельной теплопроводности прокатываемого материала; H - толщина полосы; $T_{жс}$ - температура охлаждающей эмульсии; α - коэффициент теплоотдачи от полосы к эмульсии.

При рассмотрении охлаждения полосы эмульсией учитывался нелинейный характер зависимости коэффициента теплоотдачи α от температуры полосы T , обусловленный изменениями в режиме кипения эмульсии на поверхности полосы с изменением ее температуры. Следуя [101], для расчета $\alpha(T)$ использовалось выражение

$$\alpha(T) = 42 \left(1 + 10 \left(\frac{T - T_{жс}}{200} - 1 \right)^2 \right), \quad \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}, \quad (3.34)$$

полученное в результате обработки большого числа экспериментальных данных по охлаждению эмульсией полосы, прокатываемой на стане горячей прокатки алюминиевых сплавов.

Решение нелинейной задачи (3.31)- (3.34) осуществлялось с помощью неявных разностных схем. Результаты расчетов, проведенных в широком диапазоне изменения переменных, охватывающем возможные режимы охлаждения полосы эмульсией на стане горячей прокатки алюминиевых сплавов, позволили сделать следующие выводы.

Во всех практически возможных режимах прокатки перепад температур по толщине охлаждаемой полосы не превышал $16^\circ C$, достигая этого максимального значения на входе в первую клетку непрерывного стана. В межклетевых промежутках перепад температур по толщине за счет охлаждения полосы не превышал $5^\circ C$. Столь незначительные перепады температур позволяют предположить, что на входе в очаг деформации достаточно задавать температуры, средние по толщине полосы. На основе этого была построена упрощенная модель охлаждения полосы эмульсией, характеризующая процесс теплообмена только средней по толщине температурой $T_{ср}$.

Уравнение (3.31) интегрировалось по x от 0 до H , после чего с использованием граничных условий (3.33) было получено

$$T_{ср} = T_{жс} + (T_0 - T_{жс}) \exp \left(- \frac{\alpha_0 \tau}{\rho C_p H} \right), \quad (3.35)$$

где $\alpha_0 = \alpha(T_0)$ (T_0 – температура полосы до охлаждения).

Расчеты показали, что при моделировании охлаждения полосы в межклетевых промежутка непрерывного стана. расхождения в значениях T_{cp} по моделям (3.3.1)-(3.3.4) и (3.35) не превышают 2-3°C.

Существенные различия в результатах расчетов по двум моделям получены в диапазоне параметров, характерном для охлаждения перед первой рабочей клетью непрерывного стана при временах охлаждения $\tau > 30$ с.

Для выполнения расчетов T_{cp} перед входом в очаг деформации была разработана модель, в которой T_{cp} перед входом в первую клеть непрерывного стана находилась путем решения нелинейной системы (3.31)-(3.34). В остальных случаях использовалось выражение (3.35).

При построении упрощенной модели для расчета тепловых и энергосиловых характеристик в очаге деформации последний рассматривался как объект с сосредоточенными параметрами. В этом случае расчетная зависимость температуры полосы T_1 на выходе из очага деформации от характеристик процесса представлялась в виде

$$T_1 = T_{ex} - \frac{2\alpha_1(T_{ex} - T_g)L_g}{\rho C_p H_{cp} V_g} + \eta \frac{P_{cp}}{\rho C_p} \ln\left(\frac{H_0}{H_1}\right), \quad (3.36)$$

где T_{ex} - температура полосы на входе в очаг деформации; L_g - длина дуги захвата металла валками; H_{cp} - средняя толщина очага деформации; V_g - линейная скорость движения образующей цилиндрической поверхности валка; T_g - температура валка; P_{cp} - среднее удельное давление металла на валки; η - коэффициент выхода тепла деформации, принятый в соответствии с рекомендациями [68], равным 0.85; α_1 - эффективный коэффициент теплоотдачи от полосы к валку через слой окиси и масляной пленки.

Второе слагаемое в (3.36) характеризует охлаждение полосы за счет теплоотдачи валку, третье слагаемое учитывает тепловыделение за счет энергии пластической деформации.

Соотношения для расчета геометрических, кинематических и силовых характеристик очага деформации принимались в виде:

$$H_{cp} = (H_0 + H_1)/2, \quad P = BL_g P_{cp}, \quad \varepsilon = (H_0 - H_1)/H_0, \quad V_0 = V_1 H_1/H_0, \quad (3.37)$$

$$V_1 = V_g(1 + S_H), \quad (3.38)$$

$$H_1 = S + CP, \quad (3.39)$$

$$L_g = \sqrt{(H_0 - H_1)R}, \quad (3.40)$$

$$u = \varepsilon V_0 (1 + S_H) / L_g, \quad (3.41)$$

$$S_H = L_0^2 (1 - L_g / 2\mu R)^2 / 4RH_1, \quad (3.42)$$

$$M = 2PL_g f_\psi \left(\frac{L_g}{H_{cp}} \right), \quad (3.43)$$

где H_{cp} , H_0 , H_1 - средняя, входная и выходная толщины очага деформации; V_0 , V_1 - входная и выходная скорости полосы; B - ширина полосы; ε - обжатие в клети; S_H - опережение; S - задаваемый раствор валков; C - модуль жесткости клети; R - радиус валка; u - скорость деформации; μ - коэффициент трения металла о валки; f_ψ - функция, имеющая вид квадратичного полинома, конкретная форма которого заимствована из [77].

Последняя формула в (3.37) является условием постоянства расхода металла в сечениях очага деформации (условие неразрывности). Формула (3.39) отражает тот факт, что итоговая толщина полосы после клети всегда выше задаваемого раствора валков S из-за упругих свойств клети и действующего на валки усилия P со стороны деформируемого металла. При расчете L_g в (3.40) не учтено сплющивание валков, что вносит, как показали численные оценки для исследуемого процесса, лишь незначительную погрешность порядка 2-3%. Формула (3.41) получена в [145] из простых геометрических соображений. Выражение (3.42) получено в [10] при допущении симметричной эпюры давления по длине дуги контакта.

Применение более сложных зависимостей, учитывающих натяжения, сплющивание валков нецелесообразно в данной модели ввиду отсутствия надежных данных о длине зоны прилипания - участка контакта, где отсутствует проскальзывание металла относительно валков. Формула (3.42) удобна тем, что расчетные опережения S_H малочувствительны к вариациям μ , значения которого при прокатке алюминиевых сплавов меняются в интервале от 0.1 до 0.7. В расчетах, следуя рекомендациям [73], принимали $\mu = 0.3$.

Для оценки удельных давлений использовали критериальное уравнение

$$P_{cp} = (2k_f - b_0\sigma_0 - b_1\sigma_{10})f\left(\frac{L_g}{H_{cp}}\right), \quad (3.44)$$

являющееся обобщением данных опыта. В (3.44) σ_1 , σ_2 - переднее и заднее натяжения полосы, соответственно; b_0 , b_1 - эмпирические константы, равные нулю при реверсивной горячей или бесслитковой прокатке; k_f - сопротивление пластическому сдвигу. Значения k_f находились из выражения

$$k_f = K_0 f_T(T_{cp}) f_\varepsilon(\varepsilon) f_u(u), \quad (3.45)$$

где f_T , f_ε , f_u - некоторые функции, аппроксимирующие данные опытов, конкретная форма которых для широкого диапазона алюминиевых сплавов представлена в [77]; K_0 - базовое значение k_f при выбранных базовых значениях T_{cp} , ε и u . В соответствии с результатами [77], функция f представлялась в виде:

$$f = 1.25 \left(\ln\left(\frac{1}{m}\right) + m \right) - 0.25, \quad (3.46)$$

$$m = \begin{cases} L_g/H_{cp}, & m \geq 1 \\ H_{cp}/L_g, & m < 1. \end{cases}$$

Модели типа (3.44)÷(4.45) являются обобщением экспериментальных данных, полученных в широком диапазоне изменения параметров процесса. Они обеспечивают достаточно высокую точность расчета P_{cp} и наиболее часто используются в отечественной инженерной практике. За рубежом более популярны приближенные выражения, полученные аналитическим путем [77], из которых наиболее часто используется формула Симса, обладающая теми же достоинствами, что и (3.44), т.е. малой чувствительностью к коэффициенту трения и высокой точностью в широком диапазоне изменения переменных:

$$P_{cp} = (2k_f - b_0\sigma_0 - b_1\sigma_1) \left[\frac{\pi}{2} b \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b}\right) - \frac{\pi}{4} - b \sqrt{\frac{R}{H_1}} \ln\left(\frac{H_{cp}}{H_1}\right) + \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{R}{H_1}} \ln\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) \right], \quad (3.47)$$

$$b = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Таким образом, построены две альтернативные модели: (3.36)-(3.46) - модель Z_1 и (3.45) ÷ (3.47) - модель Z_2 .

Проведем сравнительную оценку качества моделей Z_1 и Z_2 . Это имеет не только практический, но и теоретический интерес, поскольку позволяет ответить на вопрос о сопоставимости результатов в пределах класса моделей с сосредоточенными параметрами и дает возможность оценить целесообразность усложнения математических описаний этого типа.

Анализируемые модели представляют собой системы нелинейных алгебраических уравнений, решение которых осуществлялось численными методами. Исследование чувствительности моделей Z_1 и Z_2 к изменению входных переменных позволило сделать выводы, справедливые, вообще говоря, лишь в условиях горячей прокатки алюминиевых сплавов. Во-первых, влияние натяжений σ_0 и σ_1 пренебрежимо мало, и также незначительно влияние η в пределах допустимого диапазона. Наибольшее влияние на результаты расчетов оказывают K_0 и α_1 , являющиеся адаптивными параметрами моделей. Несколько меньше влияет T_g , представляющая собой в данном случае параметр разорванной связи, появившийся в результате упрощения задачи теплообмена полосы с валком.

Следует отметить, что зависимость (3.44) получена обобщением данных экспериментов, проведенных, в основном, на реверсивных станах, что не дает оснований уверенно судить об ее адекватности применительно к условиям исследуемого стана непрерывной горячей прокатки алюминиевых сплавов. Поэтому, с целью оценки пригодности критериальной зависимости (3.44) для оценки энергосиловых характеристик при прокатке на непрерывном стане 2800 была проведена серия экспериментов в широком диапазоне изменения технологических режимов и марок алюминиевых сплавов. Ввиду того, что при прокатке алюминиевых сплавов влияние натяжений σ_0 и σ_1 пренебрежимо мало, экспериментальная проверка адекватности выражения (3.44) сводилась к построению зависимости $P_{cp}/2k_f$ от отношения L_g/H_{cp} . При этом H_{cp} рассчитывалось по формуле

$$H_{cp} = (H_0 + S + (P - P_0)C + h_0)/2,$$

где h_0 - начальная установка продуктиметров (измерители раствора валков) при поджатии валков без металла при усилнии P_0 . Затем по формуле (3.40) рассчитывали L_g . Из соотношения $P_{cp} = P/(BL_g)$ находили P_{cp} и по (3.45) определяли k_f . Ввиду отсутствия надежной информации о температуре полосы в промежуточных клетях при расчетах k_f использовали

среднюю температуру полосы в стане. Измерения и расчеты проводились для сплавов *Al*, *AMц*, *Д1*, *Д16*, *AMзб* для 56 экспериментальных точек. Результаты проведенных исследований представлены на рис. 3.9, где приведен также график, построенный по (3.44).

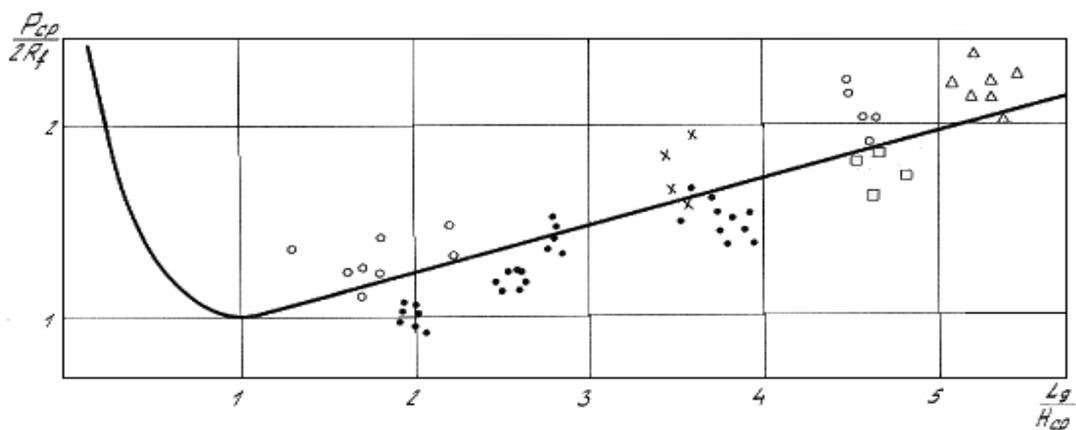


Рис.3.9. Проверка адекватности критериальной зависимости для расчета среднего удельного давления в непрерывной группе клетей для сплавов: \circ - *Al*; \bullet -*Д16*; \square -*Д1*; \times -*AMзб*; \triangle -*AMц*.

Из рисунка видно, что критериальная зависимость (3.44) удовлетворительно описывает данные, полученные в натурном эксперименте и может быть использована при расчетах тепловых и энергосиловых характеристик при горячей прокатке алюминиевых сплавов.

Перед проведением работ по структурно-параметрической идентификации предложенных моделей Z_1 и Z_2 , построенных на базе соотношений (3.44) и (3.47), необходимо убедиться в принципиальной возможности достижения на моделях такого класса достаточной точности расчетов основных характеристик процесса.

С этой целью на основе экспериментальных данных, полученных на непрерывной группе клетей стана 2800 была проведена параметрическая идентификация процесса с помощью модели Z_1 . При проведении экспериментальных исследований измерялись

геометрические размеры полосы; температура полосы перед входом в непрерывную группу клетей; растворы валков во всех клетях; скорости вращения валков; усилия на валках в последней клетке; температура полосы на выходе из последней клетки прокатного стана.

Отыскание численных значений параметров K_0 и α_1 , входящих в модель Z_1 , осуществлялось путем их идентификации по двум экспериментально измеряемым величинам - усилию на валках в последней клетке и температуре полосы на выходе из нее. При этом, в соответствии с рекомендациями [101], температура валка T_e задавалась равной 80°C . Методика идентификации сводилась к поиску значений K_0 и α_1 , минимизирующих отклонение расчетных значений температуры и давления от экспериментальных. Для этого использовался метод последовательной градиентной минимизации.

Описанным способом были найдены значения K_0 и α_1 для сплавов *Al*, *Д16* и *Ал2б* при использовании 10 экспериментов для каждого сплава. Итоговые значения K_0 и α_1 находились усреднением по экспериментам для каждого из сплавов. Последняя процедура не является, строго говоря, корректной, так как не обеспечивает минимизации найденными таким образом величинами K_0 и α_1 среднеквадратических отклонений расчетных и экспериментальных данных. Тем не менее, в рассматриваемом конкретном случае процедура усреднения дает вполне удовлетворительные для практики результаты.

Расчеты показали, что полученные значения адаптивных параметров находятся в пределах физически допустимых диапазонов их изменения. При этом значения α_1 оказались весьма близкими для разных сплавов, что объясняется незначительностью вариации теплофизических свойств у алюминиевых сплавов.

Результаты сравнения экспериментальных и расчетных данных, полученных на идентифицированных моделях (табл. 3.3), говорят о достаточной адекватности моделей с сосредоточенными параметрами, и возможности их использования для оптимизации тепловых и энергосиловых характеристик при прокатке. Следует отметить, что при некоторых незначительных изменениях разработанная модель может быть использована для расчета процесса прокатки сталей и других материалов.

Таблица 3.3. Сравнение экспериментальных и расчетных данных для непрерывной группы клетей

Спла в	Ширина B , м	Входная толщина H_p , мм	Входная температур а T_p , °C	Выходная толщина H_0 , мм		Усилие на валки P , 10^7 4H		Выходная температура $T_{вых}$, °C	
				экспе- римент	рас- чет	экспе- римен т	рас- чет	экспе- римент	рас- чет
<i>Al</i>	1.2	50	456	4.92	4.93	512	519	365	372
	1.5	50	450	5.73	5.75	477	485	345	361
	1.86	50	444	7.61	7.67	561	578	350	360
<i>Д16</i>	2.12	30	393	5.60	5.52	514	475	382	363
	2	35	405	7.67	7.50	499	417	375	361
<i>Ал2б</i>	17.7	35	430	5.46	5.35	450	400	390	395

Решение вопроса о выборе лучшей модели среди описанных выше конкурирующих моделей тепловых и энергосиловых характеристик процесса прокатки: Z_1 , основанной на критериальном уравнении для расчета среднего удельного давления металла на валки и Z_2 , основанной на уравнении Симса, опиралось на использование описанной выше методики структурно-параметрической идентификации.

Как указывалось выше, наибольшее влияние на результаты расчетов оказывают базовое сопротивление деформации K_0 и эффективный коэффициент контактного теплообмена между полосой и валком α_1 , являющиеся адаптивными параметрами. Несколько меньше влияет эффективная температура рабочего вала T_0 , представляющая собой в данном случае параметр разорванной связи, появившийся в результате упрощения задачи теплообмена полосы с валком.

Таким образом, сравниваемые модели Z_1 и Z_2 содержат по два адаптивных параметра и по одному параметру разорванной связи. Каждый из них характеризовался своими функциями желательности. В [71] указывается, что значения K_0 для одного и того же сплава могут колебаться в пределах 10% и более даже в течение одной плавки. Поэтому принимая за K_0 базовые значения из [77], а также учитывая данные работы [73], функция

желательности для адаптивного параметра K_0 представлялась в виде, показанном на рис. 3.10,а, где $\psi = (K_0 - K_{об}) / K_0$ при $K_0 \geq K_{об}$ и $\psi = (K_{об} - K_0) / K_0$ при $K_0 < K_{об}$ ($K_{об}$ - базовое значение K_0 из [77]).

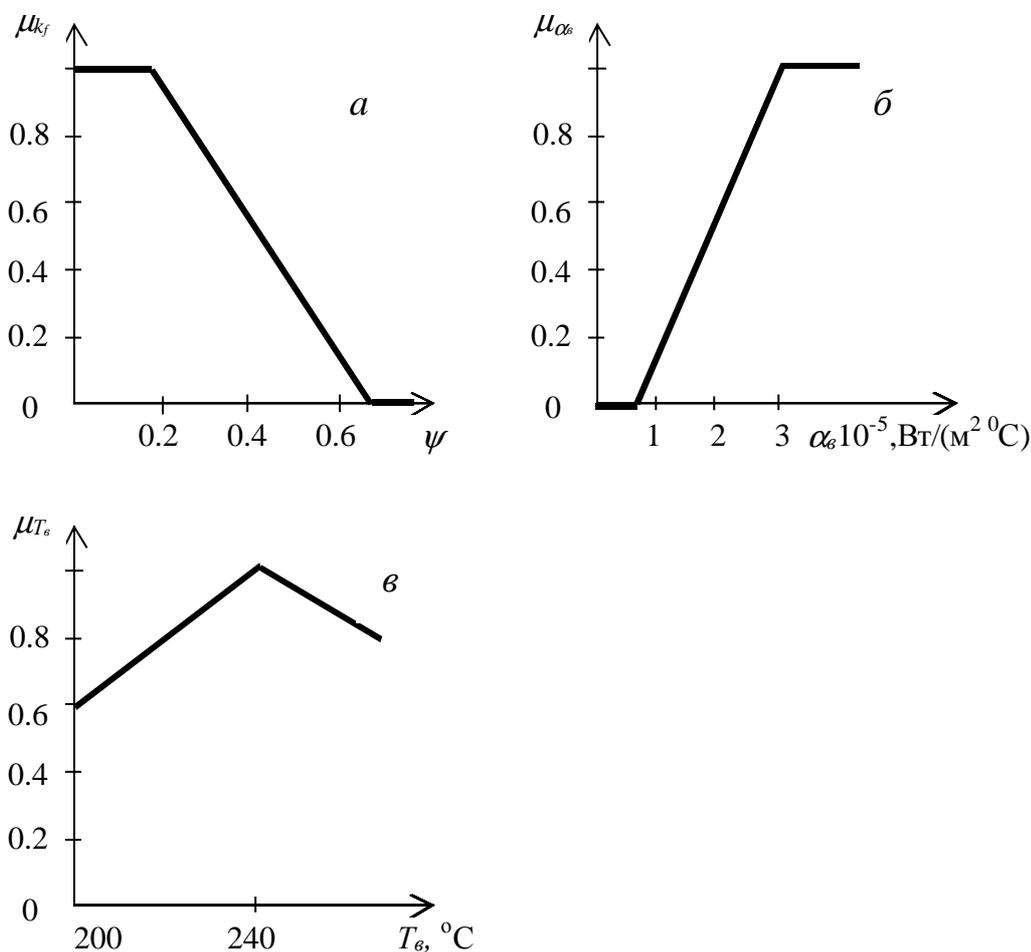


Рис. 3.10. Функции желательности параметров процесса.

Надежных расчетных или экспериментальных данных по численным значениям α_1 при горячей прокатке алюминиевых сплавов в настоящее время не имеется. В то же время в работе [65] для горячей прокатки сталей приводится $\alpha_1 = (11.6-93) \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$, согласно [135] для этого случая $\alpha_1 = (0.3-300) \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$, причем α_1 быстро растет со снижением температуры металла, что объясняется падением толщины окалины на его поверхности. При горячей прокатке алюминиевых сплавов на поверхности металла образуется легко разрушаемая в очаге деформации тонкая окисная пленка, обладающая значительно меньшим термосопротивлением, чем окалина. Поэтому в анализируемой ситуации значения α_1 должны быть намного большими, чем при горячей прокатке сталей. Это позволяет представить функцию желательности для α_1 в виде, показанном на рис. 3.10, б.

Наибольшей неопределенностью обладает параметр разорванных связей - температура валка T_6 . Опыт использования моделей Z_1 и Z_2 , и расчеты на базе более полных моделей с распределенными параметрами позволили ограничить диапазон варьирования T_6 в пределах 200-280°C. Соображения качественного характера позволили представить функцию желательности для T_6 в виде, показанном на рис. 3.10, в. Ввиду существенной неопределенности как в задании диапазона изменения T_6 , так и реперных точек функции желательности полагалось, что значения μ_{T_6} заданы на базовом множестве из трех точек 200, 240 и 280°C.

Для проведения структурно-параметрической идентификации использовались две группы опытных данных, полученных в результате пассивного эксперимента в разное время с различными наборами измерительной аппаратуры. В обоих случаях измерялись ширина полосы – B ; температура и толщина полосы перед первой клетью стана T_p, H_p ; растворы валков во всех клетях S_1, S_2, \dots, S_5 ; линейные скорости валков V_1, V_2, \dots, V_5 . В первой группе опытов из выходных переменных измерялись P_5 и T_5 -усилия на валках в пятой клетки и конечная температура полосы. Значения P_5 и T_5 находились путем усреднения показаний приборов на пульте оператора за время прохода полосы. Во второй группе опытов входные и выходные переменные находились путем подключения к локальным системам автоматике стана специального измерительного комплекса К-484/2. Полученные данные также усреднялись по длине полосы. В качестве выходных переменных измерялись усилия на валках во всех клетях P_1, P_2, \dots, P_5 .

Критерии точности измерения температуры μ_{T_5} и усилий μ_{P_i} ($i = 1, 2, \dots, 5$) представлены на рис. 3.11, где $\Delta P = P_p - P_3$ (P_p, P_3 - расчетные и измеренные усилия на валки); $\Delta T_5 = T_{5p} - T_{53}$ (T_{5p}, T_{53} - расчетные и измеренные температуры конца прокатки).

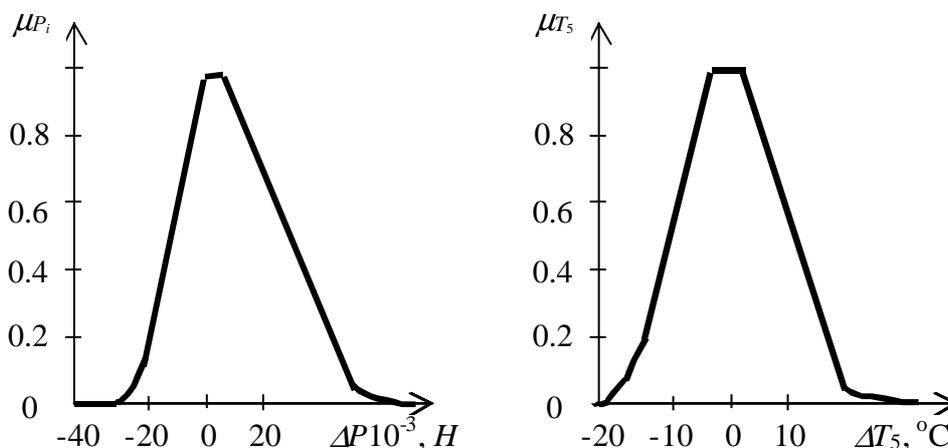


Рис. 3.11. Критерии точности моделей по усилию на валки и конечной температуре полосы

Видно, что зависимость $\mu_{P_i}(P_i)$ характеризуется заметной несимметричностью, что объясняется большей предпочтительностью завышенных расчетных усилий, чем заниженных.

Ввиду наличия двух групп опытных данных, различающихся по точности и составу измеряемых переменных, для каждой из серий экспериментов вводились собственные обобщенные критерии качества моделей D_1 и D_2 .

Для первой группы, состоящей из N_1 опытов, принимали

$$D_{1i}(T_{\%j}) = \max_{\alpha_{\%}, \dot{c}_0} \min(\mu_{T_5}^{\alpha_1}, \mu_{P_5}^{\alpha_2}, \mu_{K_0}^{\alpha_3}, \mu_{\alpha_{\%}}^{\alpha_4}), i = 1, \dots, N_1, j = 1, 2, 3. \quad (3.48)$$

Для второй группы из N_2 опытов полагалось:

$$D_{2i}(T_{\%j}) = \max_{\alpha_{\%}, \dot{c}_0} \min(\mu_P^{\beta_1}, \mu_{K_0}^{\beta_2}, \mu_{\alpha_{\%}}^{\beta_3}), i = 1, \dots, N_2, j = 1, 2, 3. \quad (3.49)$$

где $\mu_P = \left(\sum_{i=1}^5 \mu_{P_i}(P_i) \right) / 5$ - усредненное по клеткам значение критерия точности; j -

номер опорной точки базового множества T_{ϵ} ($T_1 = 200$, $T_2 = 240$, $T_3 = 280^{\circ}\text{C}$).

Коэффициенты относительной важности критериев находились с использованием матрицы парных сравнений по методике, описанной в главе 2.

В результате были получены: следующие ранги критериев: $\alpha_1 = 2.9$; $\alpha_2 = 0.7$; $\alpha_3 = 0.3$; $\alpha_4 = 0.17$; $\beta_1 = 2.5$; $\beta_2 = 0.3$; $\beta_3 = 0.19$.

Поиск экстремумов в (3.48), (3.49) осуществлялся методом адаптивной квадратической аппроксимации.

Первая серия опытов, на базе которой строился критерий D_{1i} , содержала измерения для 10 режимов прокатки Al и 10 режимов прокатки сплава $AlMg6$, вторая серия - 10 режимов прокатки сплава $AlMg2$. С использованием полученных значений $D_{1i}(T_{\epsilon j})$ и $D_{2i}(T_{\epsilon j})$ для каждой из моделей Z_1 и Z_2 и для каждого из $T_{\epsilon j}$ в соответствии с (3.7) были получены оценки

$$D_k(T_{0j}, Z_L) = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} D_{ki}(T_{\%ij}, Z_L), L = 1, 2; j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \quad (3.50)$$

где L - номер модели, k - номер группы опытов.

Модели Z_1 и Z_2 предназначены для решения задач оптимизации технологических режимов при автономном использовании. Поэтому оценка качества моделей на множестве $T_{\%ij}$ проводилась по формуле (3.9):

$$D_{kl} = \max_j \min \left(\mu_{T_{\%ij}}, D_k(T_{\%ij}, Z_L) \right). \quad (3.51)$$

На основе глобальных критериев качества D_1 и D_2 формировался "идеальный" критерий

$$D_i = \left\{ \frac{\mu(D_1)}{D_1}, \frac{\mu(D_2)}{D_2} \right\}. \quad (3.52)$$

Для функций желательности принимались значения $\mu(D_1) = 0.6$, $\mu(D_2) = 0.4$ поскольку критерий D_1 , несмотря на грубость и неполноту экспериментов первой серии, содержит оценку точности прогноза выходной температуры полосы T_5 - важной характеристики технологического процесса.

Используя (3.12)-(3.14), для нашего случая из (3.52) получаем:

$$D_i = \left\{ \frac{\mu(D_1)}{\left\{ \frac{D_{11}(Z_1)}{Z_1}, \frac{D_{12}(Z_2)}{Z_2} \right\}}, \frac{\mu(D_2)}{\left\{ \frac{D_{21}(Z_1)}{Z_1}, \frac{D_{22}(Z_2)}{Z_2} \right\}} \right\} = \left\{ \frac{\max(\mu(D_k) D_{kl})}{Z_L} \right\}, \quad k = 1, 2; \quad L = 1, 2. \quad (3.53)$$

После проведения всех вычислений получено $D_i = \left\{ \frac{0.449}{Z_1}, \frac{0.48}{Z_2} \right\}$, откуда следует, что

модель Симса лишь незначительно предпочтительнее модели на базе полуэмпирической критериальной зависимости для расчета P_{cp} . Можно утверждать, что на практике эти модели эквивалентны.

В табл. 3.4 приведены значения глобального критерия качества модели для различных режимов прокатки, а также погрешности лучшей модели после идентификации. Все данные табл. 3.4 получены для случая прокатки *Al*, расчеты по модели Z_2 (модель Симса) проводились при $T_в$, максимизирующем оценки (5.5).

Таблица 3.4. Оценка качества и погрешности модели

Номер режима	D_1	$\alpha_6 10^{-5}$, Вт/(м ² °С)	$K_0 10^{-7}$, Н/м ²	$T_{5з}$, °С	$T_{5р}$, °С	$T_{5р} - T_{5з}$, °С	$\frac{ T_{5р} - T_{5з} }{T_{5з}}$
1	0.916	2.28	2.59	350	361	11	0.03
2	0.895	2.05	2.52	355	372	17	0.05
3	0.896	2.07	2.70	358	342	-16	0.04
4	0.899	1.20	2.34	355	369	14	0.04
5	0.907	2.10	2.33	345	355	10	0.03
6	0.907	2.49	2.32	335	328	-7	0.02
7	0.926	2.63	2.46	335	329	-6	0.02
8	0.909	2.20	2.34	345	353	8	0.02
9	0.913	2.25	2.37	345	339	-6	0.01
10	0.910	2.22	2.38	350	357	-17	0.02

Приведенные результаты позволяют судить о высокой точности модели по выходной температуре (погрешность не выше 5%). Такие же погрешности характерны и для усилий прокатки. Для твердых сплавов типа *АМ25*, *Ам2б* погрешность модели возрастает и может в отдельных случаях достигать 10-12%. Таким образом модель обладает точностью, достаточной для ее использования при оптимизации процесса прокатки.

Важно отметить, что разработанные модели после идентификации в непрерывной группе клетей дают хорошие результаты и при исследовании процесса реверсивной прокатки (рис. 3.12). Характерной особенностью этого процесса является непостоянство скорости движения полосы, возрастающей от нуля до установочного значения при каждом проходе полосы. Как видно из рисунка, этот нежелательный эффект приводит к подстуживанию концов полосы и ее дальнейшей продольной разнотолщинности после непрерывной горячей прокатки. Поэтому при исследовании тепловых и энергосиловых процессов в реверсивных клетях исходная модель Z_2 была соответствующим образом модифицирована с использованием измеренных в опытах значений ускорения полосы после ее захвата валками и времени ее ускоренного движения.

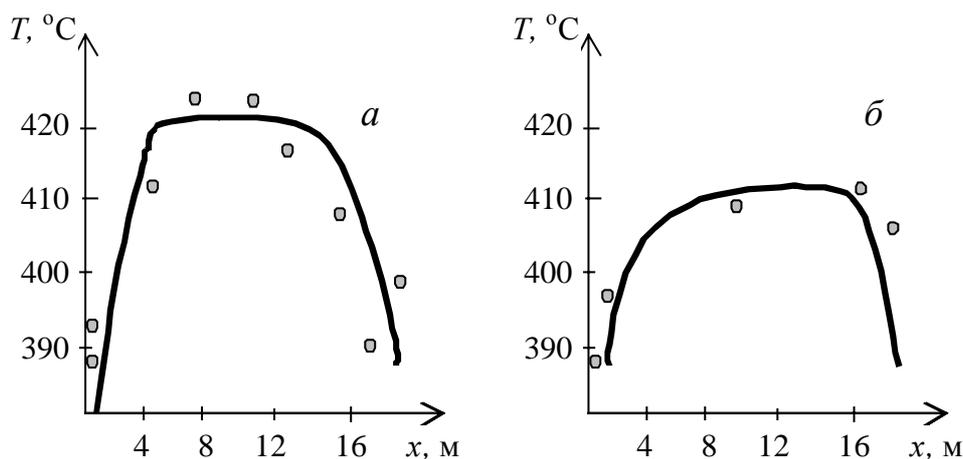


Рис.3.12. Сравнение расчетного распределения температуры по длине полосы после реверсивной группы клетей с экспериментом при прокатке алюминия – *а*; и сплава Д16 – *б*

Из рис. 3.12 видно, что погрешность модели и в этом случае невелика (измерения температур проводились штычковыми термопарами на поверхности широкой грани полосы). Проведенные исследования позволили выявить закономерности формирования температурной неравномерности по длине полосы и разработать способ реверсивной прокатки с поджатием конца полосы (а.с. № IOI3006), позволяющий существенно повысить однородность ее температурного поля и за счет этого снизить брак по продольной разнотолщинности.

Одним из наиболее важных результатов проведенных исследований явилось доказательство практической эквивалентности сравниваемых моделей Z_1 и Z_2 , откуда следует нецелесообразность дальнейшего структурного усложнения моделей с сосредоточенными параметрами, используемых для решения задач оптимизации режимов прокатки.

§ 3.5. Многокритериальная оптимизация непрерывной горячей прокатки алюминиевых сплавов

Решение задачи оптимизации осуществлялось с использованием математической модели Z_2 , описанной в параграфе 3.4, и идентифицированной в условиях прокатки на пятиклетевом стане 2800. Модель не требовала больших затрат машинного времени, поэтому ее редукция не проводилась.

Качество горячекатаной полосы определяется, главным образом, ее выходными характеристиками: толщиной полосы после прокатки H_5 и температурой после последней

клетей - T_5 . Кроме того, на значения целого ряда технологических параметров накладываются ограничения, вытекающие из условий надежности работы оборудования, требований увеличения выхода годного и т.д. Наиболее важными являются ограничения на усилия P_i и крутящие моменты M_i ($i = 1, \dots, 5$ - номер клетки), на толщину H_p и температуру полосы перед первой рабочей клетью T_p , ограничения на выходную скорость полосы V_5 - и сопротивления деформации K_f в последних двух клетях стана.

Задача оптимизации сводится к отысканию распределений обжатий S_i и скоростей прокатки V_i по клетям, обеспечивающих максимальное удовлетворение критериям качества и ограничениям.

Специфика процесса - прохождение металла через ряд последовательных клетей - позволяет рассматривать его как в определенной мере эволюционный и использовать для оптимизации метод динамического программирования.

Для формализации частных критериев и ограничений использовались функции желательности. При построении критерия качества по выходной температуре прокатки T_5 учитывалось, что начиная с $T_5 = 350^\circ\text{C}$ и выше в алюминиевых сплавах начинается интенсивный процесс рекристаллизации, приводящий к улучшению структуры горячекатаного металла. При этом установлено, что скорость рекристаллизации растет с температурой. Следовательно, с этой точки зрения увеличение температуры T_5 желательно, так как ведет к повышению качества продукции. С другой стороны, технологическая практика показывает, что в диапазоне $T_5 = 410-430^\circ\text{C}$ с ростом температуры увеличивается вероятность взаимного сваривания витков при смотке полосы в рулон.

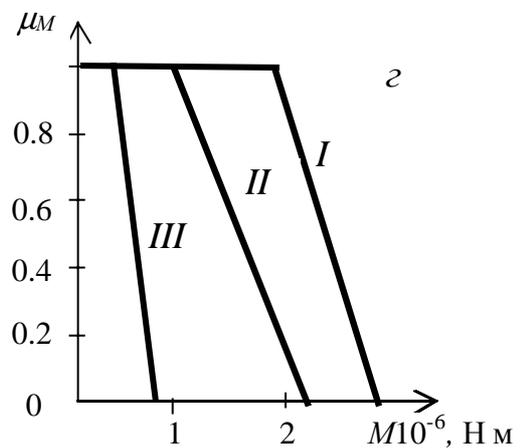
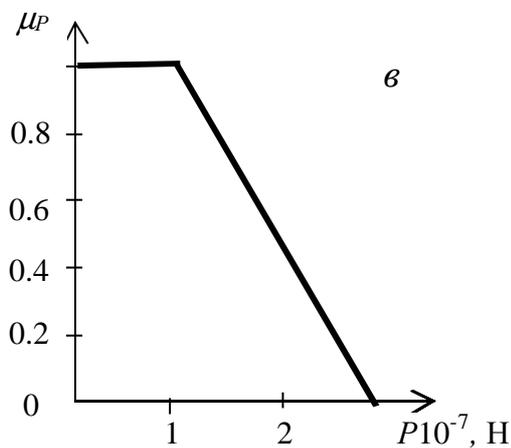
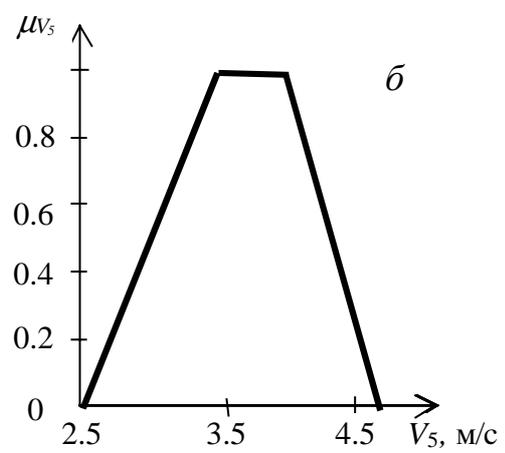
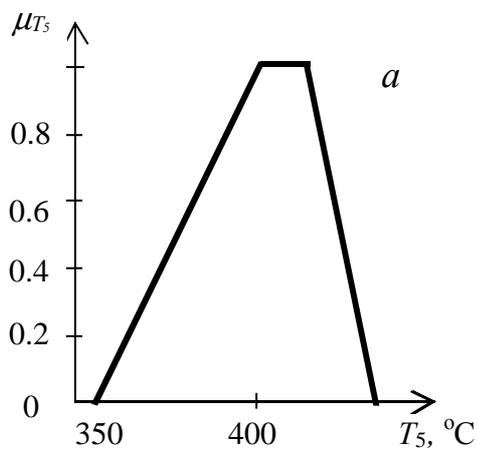
Отмеченные особенности процесса нашли свое отражение в функции желательности выходной температуры μ_{T_5} , приведенной (рис. 3.13,а).

На рис. 3.13,б представлена функция желательности μ_{V_5} для выходной скорости полосы V_5 . Она качественно отражает факт увеличения производительности с ростом V_5 в пределах от 2.5 до 3.5 м/с и снижение эффективности работы стана за счет нарастания брака при скоростях V_5 выше 4 м/с.

Функция желательности μ_{P_i} (рис. 3.13,в) формализует требование вести процесс с небольшими усилиями на валки для снижения вероятности выхода их из строя. При построении функций μ_{M_i} (рис. 3.13,г) учтена нежелательность перегрузки стана при слишком больших крутящих моментах. Отличия в μ_{M_i} для разных клетей связаны с различиями в их конструктивном исполнении. На рис. 3.13,д и рис. 3.13,е представлены

функции желательности μ_{T_p} и μ_{H_p} , отражающие естественное стремление вести прокатку при низких входных температурах и больших толщинах полосы.

Функция желательности μ_Z (рис. 3.13,ж) на качественном уровне отражает требование уменьшения наклепа в пятой клетки по сравнению с наклепом в четвертой, что должно способствовать улучшению структуры горячекатаной полосы. При выполнении этого требования можно рассчитывать на то, что при достаточно высокой выходной температуре T_5 небольшой остаточный наклеп будет устранен в процессе естественной динамической рекристаллизации.



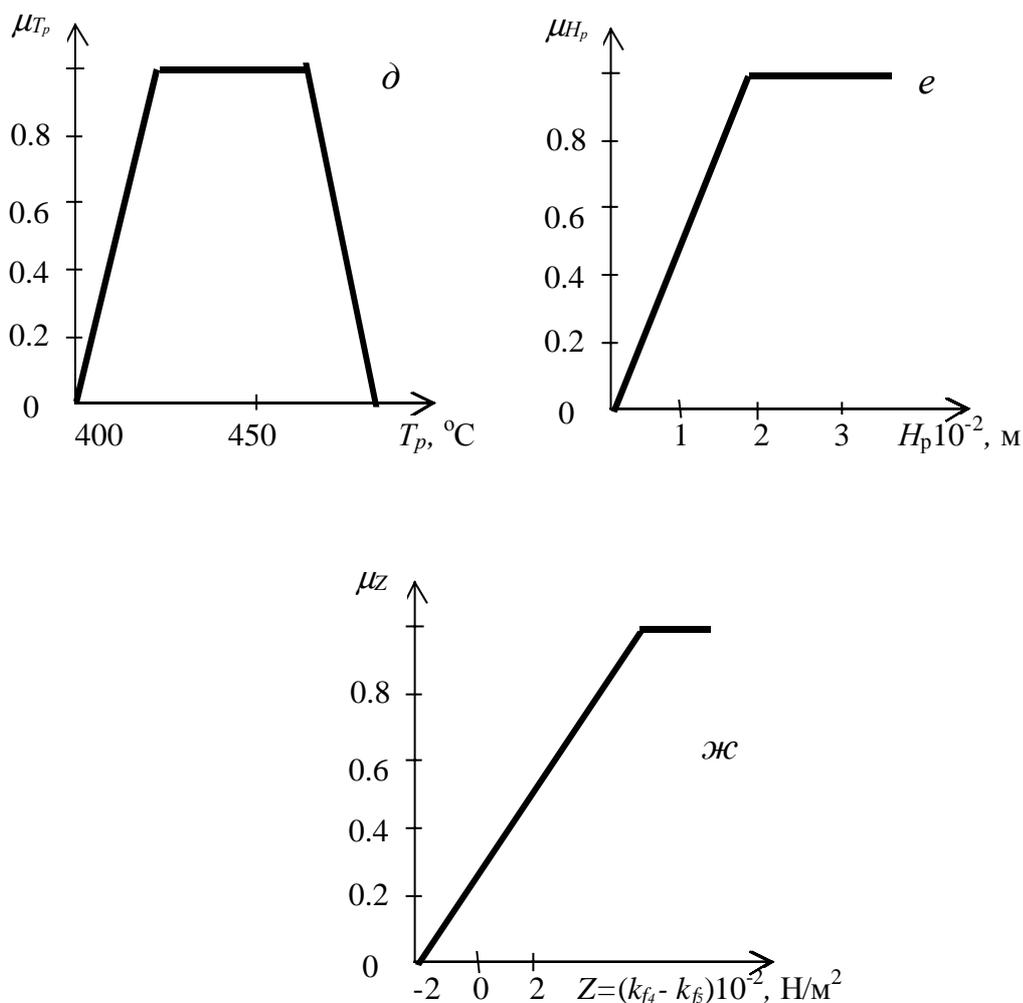


Рис. 3.13. Функции желательности при оптимизации горячей прокатки: I – $k = 1.2$; II – $k = 3$; III – $k = 4.5$ (k - номер клетки)

Выходную толщину полосы H_5 считали заданной, поэтому функция желательности μ_{H_5} не использовалась. Необходимые при постановке задачи коэффициенты относительной важности отыскивались по методике, описанной в главе 2, с помощью матриц парных сравнений.

Анализ уравнений математической модели Z_2 для расчета тепловых и энергосиловых процессов при прокатке, описанной в параграфе 3.4, позволяет представить ее в операторной форме, более компактной и удобной для постановки задачи оптимизации

$$T_k = f_T(T_{k-1}, H_k, H_{k-1}, V_k), \tag{3.54}$$

$$P_k = f_P(T_{k-1}, H_k, H_{k-1}, V_k), \tag{3.55}$$

$$M_k = f_M(T_{k-1}, H_k, H_{k-1}, V_k), \quad (3.56)$$

$$K_{fk} = f_k(T_{k-1}, H_k, H_{k-1}, V_k), \quad (3.57)$$

где k - номер клетки; T_k, P_k, M_k, K_{fk} - температура, усилие на валках, момент и сопротивление деформации, соответственно; H_{k-1}, H_k - толщина полосы на входе и выходе из k -ой клетки; V_k - скорость полосы на выходе из k -ой клетки.

Для уменьшения затрат машинного времени при использовании базовой модели (3.6)-(3.47) положим в уравнении (3.39) $C = 0$, то есть будем считать клетку абсолютно жесткой. Последнее допущение не будет в конечном итоге приводить к каким-либо погрешностям, поскольку, зная модуль жесткости C и истинное положение нажимных винтов, можно легко вычислить H_k после расчета давления металла на валки в каждой из клеток. В то же время введенное допущение позволяет проводить расчет системы уравнений модели без итераций по выходной толщине, что существенно сокращает затраты машинного времени.

Для удобства дальнейшего анализа преобразуем уравнения (3.54)-(3.57), используя формулы для относительных обжатий и удельного расхода металла в клетке:

$$\eta_k = \frac{H_{k-1} - H_k}{H_{k-1}}, \quad (3.58)$$

$$G_k = V_k H_k. \quad (3.59)$$

Перепишем выражения (3.58), (3.59) следующим образом:

$$H_k = H_{k-1}(1 - \eta_k), \quad (3.60)$$

$$V_k = G_k / H_{k-1}(1 - \eta_k). \quad (3.61)$$

Из (3.58), -(3.61) следует, что набор переменных $T_{k-1}, H_k, H_{k-1}, V_k$ в уравнениях (3.54)-(3.57) можно заменить на эквивалентный набор $T_{k-1}, H_{k-1}, G_k, \eta_k$.

Для упрощения дальнейших выкладок введем в качестве аргумента в (3.54)-(3.57) формальный вектор \vec{U}_k с компонентами

$$U_k^1 = T_{k-1}, \quad U_k^2 = H_{k-1}, \quad U_k^3 = G_k.$$

Тогда, учитывая (3.58), перепишем уравнения (3.54)-(3.57) в новой системе переменных

$$T_k = f_T(\vec{U}_k, \eta_k), \quad (3.62)$$

$$P_k = f_P(\vec{U}_k, \eta_k), \quad (3.63)$$

$$M_k = f_M(\vec{U}_k, \eta_k), \quad (3.64)$$

$$K_{f_k} = f_K(\vec{U}_k, \eta_k). \quad (3.65)$$

Введение новой системы переменных упрощает формулировку задачи и облегчает применение метода динамического программирования для решения задачи оптимизации, если \vec{U}_k интерпретировать как вектор состояния системы, а η_k - как управление.

Глобальный критерий качества для процесса горячей прокатки на пятиклетевом стане представим как свертку частных критериев по всем клетям

$$D = \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_3 \wedge \mu_4 \wedge \mu_5. \quad (3.66)$$

При формулировке критерия (3.66) было принято, что достижение оптимума в каждой из клеток не зависит от ее номера. Следовательно, клетки полагаются равноценными с точки зрения достижения их собственных глобальных оптимумов.

Каждая из функций желательности $\mu_1 \div \mu_5$ представляется сверткой соответствующих функций желательности для частных критериев в рассматриваемой клетки, взятых с соответствующими рангами

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mu_{H_0}^{\alpha_1}(H_0) \wedge \mu_{T_0}^{\alpha_2}(T_0) \wedge \mu_{P_1}^{\alpha_3}(P_1) \wedge \mu_{M_1}^{\alpha_4}(M_1) = \\
&= \mu_{H_p}^{\alpha_1}(U_1^2) \wedge \mu_{T_p}^{\alpha_2}(U_1^1) \wedge \mu_{P_p}^{\alpha_3}(f_p(\bar{U}_1, \eta_1)) \wedge \mu_{M_p}^{\alpha_4}(f_M(\bar{U}_1, \eta_1)) = \mu_1(\bar{U}_1, \eta_1),
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\mu_2 = \mu_{P_2}^{\beta_1}(P_2) \wedge \mu_{M_2}^{\beta_2}(M_2) = \mu_{P_p}^{\beta_1}(f_p(\bar{U}_2, \eta_2)) \wedge \mu_{M_p}^{\beta_2}(f_M(\bar{U}_2, \eta_2)) = \mu_2(\bar{U}_2, \eta_2), \tag{3.68}$$

$$\mu_3 = \mu_{P_3}^{\beta_1}(P_3) \wedge \mu_{M_3}^{\beta_2}(M_3) = \mu_{P_p}^{\beta_1}(f_p(\bar{U}_3, \eta_3)) \wedge \mu_{M_p}^{\beta_2}(f_M(\bar{U}_3, \eta_3)) = \mu_3(\bar{U}_3, \eta_3), \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= \mu_{P_4}^{c_1}(P_4) \wedge \mu_{M_4}^{c_2}(M_4) \wedge \mu_{Z}^{c_3}(K_{f_4}, K_{f_5}) = \\
&= \mu_{P_p}^{c_1}(f_p(\bar{U}_4, \eta_4)) \wedge \mu_{M_p}^{c_2}(f_M(\bar{U}_4, \eta_4)) \wedge \dots \wedge \mu_{Z}^{c_3}(f_k(\bar{U}_4, \eta_4), f_k(\bar{U}_5, \eta_5)) = \\
&= \mu_{P_p}^{c_1}(f_p(\bar{U}_4, \eta_4)) \wedge \mu_{M_p}^{c_2}(f_M(\bar{U}_4, \eta_4)) \wedge \dots \wedge \mu_{Z}^{c_3}(f_k(\bar{U}_4, \eta_4), f_k(f(\bar{U}_4, \eta_4), \eta_5)) = \\
&= \mu_4(\bar{U}_4, \eta_4, H_5).
\end{aligned} \tag{3.70}$$

При выводе (3.70) учитывалось, что

$$\eta_5 = (H_4 - H_5)/H_4 = (H_3(1 - \eta_4) - H_5)/H_3(1 - \eta_4) = (U_4^2(1 - \eta_4) - H_5)/U_4^2(1 - \eta_4).,$$

$$\begin{aligned}
\mu_5 &= \mu_{P_5}^{d_1}(P_5) \wedge \mu_{M_5}^{d_2}(M_5) \wedge \mu_{T_5}^{d_3}(T_5) \wedge \mu_{V_5}^{d_4}(V_5) = \\
&= \mu_{P_p}^{d_1}(f_p(\bar{U}_5, \eta_5)) \wedge \mu_{M_p}^{d_2}(f_M(\bar{U}_5, \eta_5)) \wedge \mu_{T_p}^{d_3}(f_T(\bar{U}_5, \eta_5)) \wedge \dots \wedge \mu_{V_p}^{d_4}(U_5^3/U_3) = \\
&= \mu_5(\bar{U}_5, \eta_5, H_5).
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Таким образом, окончательно задача оптимизации прокатки формулировалась как поиск максимума функционала (3.66), когда состояние процесса описывается системой (3.62)-(3.65).

Решение задачи для заданной фиксированной выходной толщины полосы $H_5 = \text{const}$ осуществлялось в два этапа. На первом из них в соответствии с методом динамического программирования производилась условная оптимизация. Для нашего случая она сводилась к отысканию набора $\bar{U}_k, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, максимизирующего функционал D в выражении (3.66), т.е.

$$D(\bar{U}_1^M, \eta_1^M, \eta_2^M, \eta_3^M, \eta_4^M) = \max(\mu_1(\bar{U}_1, \eta_1) \wedge \dots \wedge \mu_2(\bar{U}_2, \eta_2) \wedge \mu_3(\bar{U}_3, \eta_3) \wedge \mu_4(\bar{U}_4, \eta_4) \wedge \mu_5(\bar{U}_5, \eta_5)). \quad (3.71)$$

В выражении (3.71) индексом M отмечено максимизирующее решение; в формулах для μ_4 и μ_5 опущена выходная величина H_5 , так как, будучи фиксированной, она не меняется при варьировании других переменных.

Рассмотрим алгоритм решения задачи, полагая, что $\bar{U}_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ меняются в заданных диапазонах. Для удобства введем обозначение $D(\bar{U}_1^M, \eta_1^M, \eta_2^M, \eta_3^M, \eta_4^M) = D^M$.

Используя (3.58), выражение (3.71) представим в виде:

$$D^M = \max_{\bar{U}_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4} (\mu_1(\bar{U}_1, \eta_1) \wedge \mu_2(\bar{U}_2, \eta_2) \wedge \mu_3(\bar{U}_3, \eta_3) \wedge \mu_4'(\bar{U}_4, \eta_4)), \quad (3.72)$$

$$\text{где } \mu_4^\circ(\bar{U}_4, \eta_4) = \mu_4(\bar{U}_4, \eta_4) \wedge \mu_5(f(\bar{U}_4, \eta_4), ((1-\eta_4)U_4^2 - H_5)/(1-\eta_4)U_4^2)) \quad (3.73)$$

Представим (3.72) следующим образом:

$$D^M = \max_{\bar{U}_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3} (\mu_1(\bar{U}_1, \eta_1) \wedge \mu_2(\bar{U}_2, \eta_2) \wedge \mu_3'(\bar{U}_3, \eta_3)), \quad (3.74)$$

$$\mu_3'(\bar{U}_3, \eta_3) = \mu_3(\bar{U}_3, \eta_3) \wedge \max(\mu_4'(f(\bar{U}_3, \eta_3), \eta_4)). \quad (3.75)$$

Перепишем (3.74) в форме:

$$D^M = \max_{\bar{U}_1, \eta_1, \eta_2} (\mu_1(\bar{U}_1, \eta_1) \wedge \mu_2'(\bar{U}_2, \eta_2)), \quad (3.76)$$

$$\mu_2'(\bar{U}_2, \eta_2) = \mu_2(\bar{U}_2, \eta_2) \wedge \max(\mu_3'(f(\bar{U}_2, \eta_2), \eta_3)). \quad (3.77)$$

Окончательно выражение (3.76) запишем в виде

$$D^M = \max_{\bar{U}_1, \eta_1} (\mu_1'(\bar{U}_1, \eta_1)), \quad (3.78)$$

$$\mu_{12}'(\bar{U}_1, \eta_1) = \mu_1(\bar{U}_1, \eta_1) \wedge \max_{\eta_2} (\mu_2'(f(\bar{U}_1, \eta_1), \eta_2)). \quad (3.79)$$

Максимизируя критерий D^M в (3.78), находим значения \bar{U}_1^M и η_1^M , являющиеся решением задачи условной оптимизации. Затем из (3.58) получаем $\bar{U}_2^M = f(\bar{U}_1^M, \eta_1^M)$, и, максимизируя $\mu_2'(\bar{U}_2^M, \eta_2)$, отыскиваем η_2^M . Аналогично находим \bar{U}_3^M, η_3^M и \bar{U}_4^M, η_4^M . Значение \bar{U}_5^M находим из выражения $\bar{U}_5^M = f(\bar{U}_4^M, \eta_4^M)$, а η_5^M из соотношения $\eta_5^M = (U_4^2)^M (1 - \eta_4^M)$. В итоге получаем полный набор параметров $\bar{U}_1^M, \bar{U}_2^M, \bar{U}_3^M, \bar{U}_4^M, \bar{U}_5^M, \eta_1^M, \eta_2^M, \eta_3^M, \eta_4^M, \eta_5^M$, определяющий оптимальную в смысле сформулированных критериев схему прокатки на пятиклетевом стане.

Перейдем от абстрактной схемы решения задачи к конкретному рассмотрению алгоритма ее численного решения.

Как указывалось ранее, выходная толщина полосы полагалась постоянной $H_5 = \text{const}$. Диапазон изменений выходной скорости задавался в виде

$$V_{\min} \leq V_5 \leq V_{\max}, \quad (3.80)$$

где V_{\min} и V_{\max} ограничивают область ненулевых значений функции желательности μ_{V_5} .

Из неравенства (3.80), условия постоянства H_5 и уравнения неразрывности течения металла $G_k = G_{k+1}$ следует

$$G_{\min} \leq G_k \leq G_{\max}, \quad k = 1, 2, \dots, 5, \quad (3.81)$$

где $G_{\min} = V_{\min} H_5$; $G_{\max} = V_{\max} H_5$.

Полагалось, что на входе в любую клетку температура полосы находится в диапазоне:

$$T_{\min} \leq T_k \leq T_{\max}, \quad k = 1, 2, \dots, 5; \quad T_{\min} = 250; \quad T_{\max} = 500. \quad (3.82)$$

Изменение обжатий в каждой клетке ограничивалось в пределах:

$$\eta_{\min} \leq \eta_k \leq \eta_{\max}, \quad k = 1, 2, \dots, 5; \quad \eta_{\min} = 0.1; \quad \eta_{\max} = 0.6. \quad (3.83)$$

Из выражения (3.60), неравенства (3.83) и условия $H_5 = \text{const}$ следуют ограничения на толщину полосы при входе в клетку:

$$\frac{H_5}{(1-\eta_{\min})^{5-k}} \leq H_k \leq \frac{H_5}{(1-\eta_{\max})^{5-k}}, \quad k = 1, 2, \dots, 5. \quad (3.84)$$

Алгоритм решения сформулированной задачи состоял из следующего ряда последовательных этапов.

1. Путем вариации величин G_5 , η_5 , T_4 в допустимых для них диапазонах строились полиномиальные аппроксимации:

$$\begin{aligned} \mu_5(\bar{U}_5, \eta_5) = \mu_5(G_5, \eta_5, T_4) = \mu_p^{d_1} \left(f_p \left(T_4, \frac{H_5}{1-\eta_5}, G_5, \eta_5 \right) \right) \wedge \dots \\ \wedge \mu_M^{d_2} \left(f_M \left(T_4, \frac{H_5}{1-\eta_5}, G_5, \eta_5 \right) \right) \wedge \mu_{T_5}^{d_3} \left(f_T \left(T_4, \frac{H_5}{1-\eta_5}, G_5, \eta_5 \right) \right) \wedge \dots \wedge \mu_{V_5}^{d_4} (G_5 / H_5), \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$K_{f_5}(\bar{U}_5, \eta_5) = K_{f_5}(G_5, \eta_5, T_4) = K_{f_5} \left(T_4, \frac{H_5}{1-\eta_5}, G_5, \eta_5 \right). \quad (3.86)$$

Варьирование параметров осуществлялось с использованием генератора равномерно распределенных случайных чисел. Зависимости (3.85), (3.86) отыскивались в виде полиномиальные аппроксимаций.

2. Путем вариации G_4 , η_4 , T_3 , H_3 в допустимых диапазонах находили аппроксимации

$$\begin{aligned} \mu_4(\bar{U}_4, \eta_4) = \mu_4(\bar{U}_4, \eta_4) \wedge \mu_5(G_5, \eta_5, T_4) = \mu_4(T_3, H_3 G_4, \eta_4) \wedge \mu_5 \left(G_4 \left((1-\eta_4) H_3 - H_5 \right) / \left((1-\eta_4) H_3 \right) \right), \\ f_T(T_3, H_3 G_4, \eta_4) = \mu_4'(T_3, H_3 G_4, \eta_4). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Варьирование параметров и построение аппроксимации (3.87) производится так же, как и при получении (3.85), (3.86). При этом аппроксимация (3.86) использовалась на этом шаге при вычислениях μ_4 .

3. Путем вариации G_3 , η_3 , T_2 , H_2 в допустимых диапазонах отыскивалась зависимость

$$\begin{aligned}
\mu_3'(\bar{U}_3, \eta_3) &= \mu_3(\bar{U}_3, \eta_3) \wedge \max(\mu_4'(T_3, H_3, G_4, \eta_4)) = \\
&= \mu_3(T_2, H_2, G_3, \eta_3) \wedge \max(\mu_4'(G_3, \eta_4, f_T(T_2, H_2, G_3, \eta_3), (1-\eta_3)H_2)) = \\
&= \mu_3'(T_2, H_2, G_3, \eta_3).
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Для поиска максимума μ_4' по η_4 использовался алгоритм последовательной квадратической аппроксимации.

4. Аналогично предыдущему этапу, путем варьирования величин G_2, η_2, T_1, H_1 находили

$$\begin{aligned}
\mu_2'(\bar{U}_2, \eta_2) &= \mu_2(\bar{U}_2, \eta_2) \wedge \max_{\eta_3}(\mu_3'(T_2, H_2, G_3, \eta_3)) = \\
&= \mu_2(T_1, H_1, G_2, \eta_2) \wedge \max(\mu_3'(G_2, \eta_3, f_T(T_1, H_1, G_2, \eta_2), (1-\eta_2)H_1)) = \\
&= \mu_2'(T_1, H_1, G_2, \eta_2).
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Построение аппроксимации и поиск экстремума проводились, как и в предыдущем случае.

5. На последнем шаге условной оптимизации варьировали G_1, η_1, T_0, H_0 . В результате была построена зависимость

$$\begin{aligned}
\mu_1'(\bar{U}_1, \eta_1) &= \mu_1(\bar{U}_1, \eta_1) \wedge \max(\mu_2'(T_1, H_1, G_2, \eta_2)) = \\
&= \mu_1(T_0, H_0, G_1, \eta_1) \wedge \max(\mu_2'(G_1, \eta_2, f_T(T_0, H_0, G_1, \eta_1), (1-\eta_1)H_0)) = \\
&= \mu_1'(T_0, H_0, G_1, \eta_1).
\end{aligned}$$

После этого этапа проводилось прямое вычисление оптимальной схемы прокатки.

6. С помощью метода последовательной квадратической аппроксимации отыскивался набор $G_1^M, \eta_1^M, T_0^M, H_0^M$, максимизирующий функцию $\mu_1'(G_1, \eta_1, T_0, H_0)$, после чего вычислялись

$$T_1^M = f_T(G_1^M, \eta_1^M, T_0^M, H_0^M), \quad H_1^M = H_0^M(1 - \eta_1^M), \quad G_5^M = G_4^M = G_3^M = G_2^M = G_1^M.$$

7. Тем же методом, что и в предыдущем случае отыскивалось значение η_2^M , максимизирующее $\mu_{21}^M(G_2^M, \eta_2^M, T_1^M, H_1^M)$. Затем вычислялись величины

$$T_2^M = f_T(G_2^M, \eta_2^M, T_1^M, H_1^M), \quad H_2^M = H_1^M(1 - \eta_2^M).$$

Производя аналогичные вычисления на последующих стадиях решения задачи, находили искомый оптимальный режим прокатки, описываемый набором параметров $T_0^M, H_0^M, H_1^M, H_2^M, H_3^M, H_4^M, V_1^M, V_2^M, V_3^M, V_4^M, V_5^M$ (оптимальные скорости прокатки рассчитываются как $V_k^M = G_k^M / H_k^M$).

Описанный алгоритм решения задачи позволяет получать высокоэффективные режимы горячей прокатки, в достаточной степени удовлетворяющие основным критериям качества процесса. В табл. 3.5 приведены результаты оптимизации режимов прокатки одного из наиболее широко применяемых алюминиевых сплавов. Видно, что для оптимального режима получено $\mu_{V_5} = 0.8$; $\mu_{T_5} = 1$, т.е. основные критерии, определяющие производительность процесса и качество продукта, удовлетворяются почти полностью.

Таблица 3.5. Результаты расчета оптимального режима горячей прокатки сплава *Ал2*

Номер клетки	1	2	3	4	5
$H_k 10^3$, м	55.1	34.6	14.3	5.8	3
V_k , м/с	0.24	0.35	0.64	1.55	3.05
μ_{P_k}	1	0.32	0.45	0.67	1
μ_{M_k}	0.89	0.78	0.78	0.27	1
$P_k 10^{-7}$, Н	0.77	1.28	2.12	1.76	1.09
$M_k 10^{-6}$, Нм	2.2	2.4	1.34	0.69	0.25
T_k , °С	384	327	325	363	396

На рис. 3.14 приведено сравнение оптимального режима с базовой схемой прокатки, соответствующей традиционной технологии.

Как видно из рисунка, применение оптимального режима позволяет значительно повысить входную толщину полосы, что способствует разгрузке реверсивных клеток, тем самым, увеличивая производительность. Наиболее важным для практики результатом явилось увеличение температуры конца прокатки с 360 °С для старых режимов до 396 °С у новых. Это обеспечило эффективный самоотжиг полосы при сворачивании ее в рулон сразу

после последней клетки, что позволило ликвидировать операцию промежуточного отжига перед горячей прокаткой.

Разработанные оптимальные режимы горячей прокатки алюминиевых сплавов внедрены в производство на Самарском металлургическом заводе.

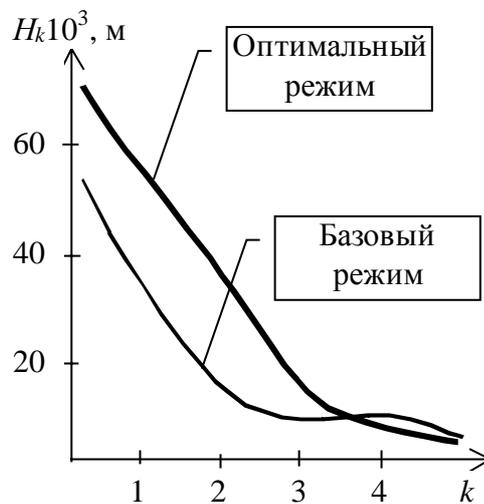


Рис. 3.14. Распределение толщины полосы по клетям

Г Л А В А IV

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВ

Настоящая глава посвящена проблемам моделирования и оптимизации работы энергоагрегатов в условиях неопределенности и является обобщением материалов, ранее опубликованных в работах [127, 103, 121-124]. Однако до анализа конкретных задач энергетики целесообразно рассмотреть некоторые проблемы методического характера.

4.1. Оптимизация при наличии интервальных и нечетко интервальных функций

Существует весьма широкий класс задач оптимизации, которые сводятся к нахождению интервальных, либо нечетко-интервальных целевых функций от четких неинтервальных аргументов. Например, целевая функция может быть представлена в виде регрессионного полинома, коэффициенты которого известны с точностью до интервала. Практика показывает, что такого рода задач значительно больше, чем кажется на первый взгляд. Игнорирование интервального (нечетко-интервального) характера задачи дает решение в виде некоторых четких чисел, при этом близость их к нижним возможным или верхним возможным значениям никак не может быть оценена. На практике это приводит к неудовлетворенности полученными результатами лиц, принимающих решение.

Поэтому для повышения эффективности решения задач оптимизации было исследовано несколько вариантов интервального расширения методов поиска экстремумов интервальных целевых функций. В качестве возможных подходов были проанализированы прямые выборочные процедуры, адаптивный алгоритм случайного поиска с переменным шагом, стохастический метод Ноллау-Фюрста [111]. При этом не рассматривались методы оптимизации 1-го и 2-го порядков, поскольку они связаны с взятием 1-ой и 2-ой производной, что для интервальных и нечетко-интервальных функций часто представляется задачей практически невыполнимой.

Тестирование показало, что наиболее эффективным для решения многоэкстремальных задач является метод прямых выборочных процедур с уменьшением интервала поиска [257], не связанный с использованием производной, в связи с чем снимается требование гладкости (непрерывности и дифференцируемости) функции. Другие проанализированные методы ориентированы на поиск локального экстремума и являются

неэффективными для решения подобных задач. В начале опишем выбранный алгоритм оптимизации в традиционной форме без использования интервальной целевой функции.

Исходными данными для решения задачи оптимизации являются:

- минимизируемая функция f от n переменных:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (4.1)$$

- допустимые границы варьирования переменных x_i :

$$\underline{x}_i < x_i < \bar{x}_i, \quad i = 1..n; \quad (4.2)$$

- функциональные ограничения:

$$g_j(x_1, \dots, x_n) < b_j, \quad j = 1..c, \quad (4.3)$$

где c - количество функциональных ограничений.

Поиск оптимального решения осуществляется в Q сериях по P итераций в каждой серии. Количество итераций в серии P определяется в результате исследования конкретной модели в зависимости от ее сложности (количества переменных, ширины их диапазонов варьирования).

Количество серий Q определяется из соображений точности, накладываемой на искомые параметры:

$$(1 - \mathcal{E})^Q \leq \frac{eps}{\max_{i=1..n}(z_i)}, \quad (4.4)$$

где eps – точность вычислений; \mathcal{E} – параметр, определяющий уменьшение интервала поиска (обычно $\mathcal{E} = 0.05$); z_i - диапазон варьирования неизвестных x_i : $z_i = \bar{x}_i - \underline{x}_i, \quad i = 1..n$.

В результате математических преобразований выражение для Q представляется в явной форме:

$$Q \ln(1 - \varepsilon) = \ln\left(\frac{\text{eps}}{\max(z_i)}\right),$$

$$Q = \frac{\ln(\text{eps}/\max(z_i))}{\ln(1 - \varepsilon)}. \quad (4.5)$$

Опишем этапы реализации алгоритма оптимизации.

Шаг 1. Определяется начальное решение. Его получаем как середины варьируемых диапазонов для каждой переменной:

$$x_i^0 = \frac{x_i + \bar{x}_i}{2}, \quad i = 1 \dots n. \quad (4.6)$$

В расчетах вектор оптимальных значений $\{x^*\}$ и вектор промежуточного оптимума $\{x^q\}$ полагаются равными вектору начальных решений $\{x^0\}$:

$$\{x^*\} = \{x^q\} = \{x^0\}. \quad (4.7)$$

Шаг 2. Вычисляется случайная точка X :

$$x_i = x_i^q + r z_i, \quad i = 1 \dots n, \quad (4.8)$$

где r – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(-0.5, 0.5)$.

Шаг 3. Выполняется проверка на допустимость.

Если $x_i < \underline{x}_i$, принимаем $x_i = \underline{x}_i$.

Если $x_i > \bar{x}_i$, принимаем $x_i = \bar{x}_i$.

На этом шаге также производится проверка на удовлетворение функциональным ограничениям типа (4.3). При неудовлетворении хотя бы одному ограничению данная точка отбрасывается, после чего происходит возвращение на Шаг 2.

Шаг 4. Вычисляется функция $f(\{x\})$. Если при минимизации $f(\{x\}) < f(\{x^*\})$, то принимаем $\{x^*\} = \{x\}$. Если $p < P$, увеличиваем p на 1 и переходим к шагу 2.

Если $p = P$, переходим к шагу 5.

Шаг 5. Если $q < Q$:

- принимаем $\{x^q\} = \{x^*\}$;
- уменьшаем интервал поиска:

$$\{z\} = \{z\}(1 - \varepsilon). \quad (4.9)$$

- увеличиваем Q на 1 и переходим к шагу 2.

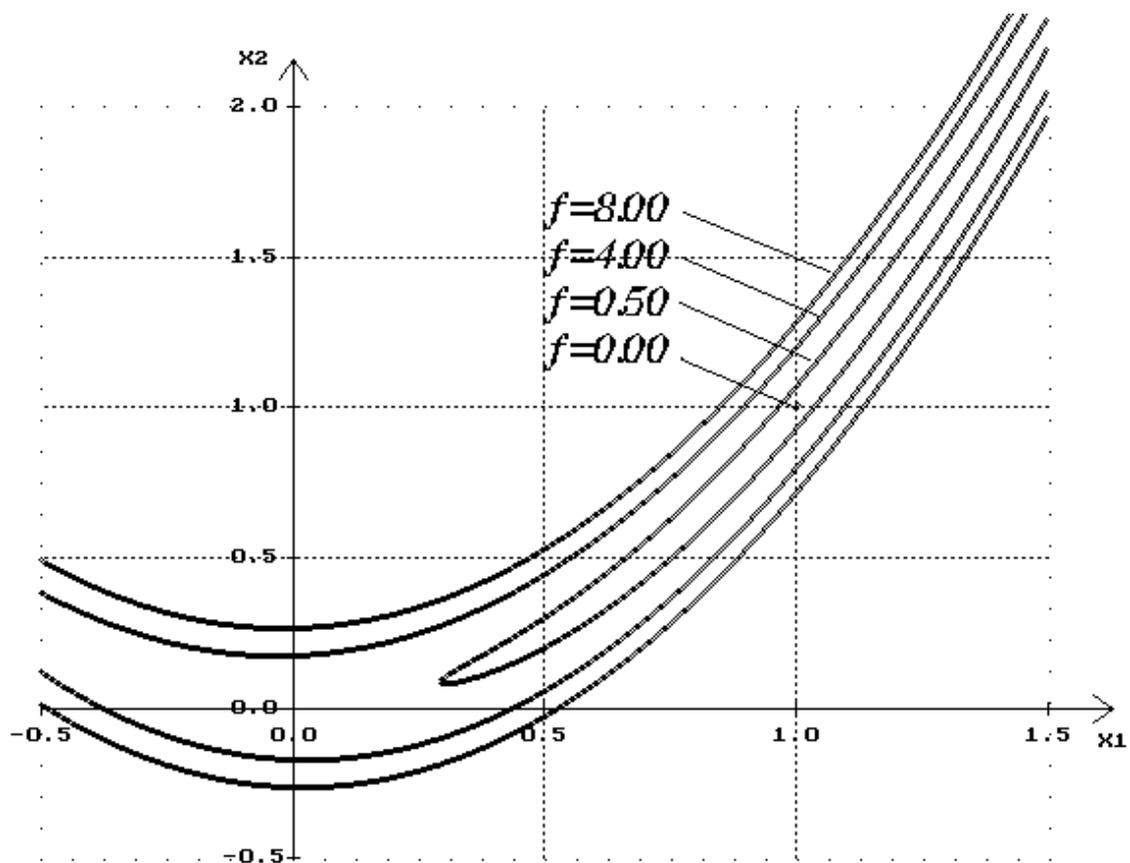
Если $q = Q$ - заканчиваем вычисления.

Для задач оптимизации с интервальными и нечетко-интервальными целевыми функциями и ограничениями описанный алгоритм модифицируется применительно к интервальному и нечетко-интервальному данным. При этом используется теоретико-вероятностный подход к сравнению четких и нечетких интервалов, описанный в главе I.

Работоспособность рассмотренного метода была исследована на примере широко распространенной тестовой функции от двух переменных, имитирующей сильную «овражность», - функции Розенброка [111]:

$$f = c \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2. \quad (4.10)$$

Линии равного уровня функции Розенброка при $c=100$ представлены на рис. 4.1.



Р

ис. 4.1. Линии равного уровня функции Розенброка

Поведение функции на дне оврага определяется достаточно малым вторым членом в (4.10), крутые склоны оврага и форма дна описываются первым, имеющим больший вес. Минимум функции равен нулю $f_{opt}=0$ и достигается при единичных значениях переменных – $x_1^{opt} = x_2^{opt} = 1$.

Исходные данные для тестовой задачи оптимизации в четкой постановке были взяты следующими:

- минимизируемая функция (4.10) при $C=100$;
- допустимые границы варьирования переменных (приняты произвольно):

$$\begin{cases} -2.5 \leq x_1 \leq 1.5; \\ -2.5 \leq x_2 \leq 1.5; \end{cases} \quad (4.11)$$

- точность оптимизации: $eps=0.001$.

В соответствии с рассматриваемым методом оптимизации начальная точка определяется как середина варьируемого диапазона:

$$x_1^{нач} = x_2^{нач} = \frac{-2.5+1.5}{2} = -0.5.$$

Результаты минимизации функции (4.10) представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1 Результаты тестирования функции Розенброка

Показатель	Значение
Стартовая точка задачи оптимизации	
$f_{нач}$	58.5
$x_1^{нач}$	-0.5
$x_2^{нач}$	-0.5
Оптимальное решение	
$f_{опт}$	$0.034 \cdot 10^{-3}$
$x_1^{опт}$	0.995
$x_2^{опт}$	0.989
Количество итераций	3900

Из таблицы 4.1 следует, что погрешность отыскания оптимума по функционалу f составила $3.4 \cdot 10^{-5}$ и по переменным x_1 и x_2 – $5 \cdot 10^{-3}$ и $1.1 \cdot 10^{-2}$, соответственно, т. е. предложенный метод оптимизации оказался весьма эффективным.

Для тестирования используемого метода в четко-интервальной задаче оптимизации исходная целевая функция (4.10) была взята в следующей интервальной форме:

$$F(x_1, x_2) = [\underline{F}(x_1, x_2), \overline{F}(x_1, x_2)] = [c - c \cdot \alpha, c + c \cdot \alpha] (x_2 - x_1)^2 + (x_1)^2, \quad (4.12)$$

где α - оценка среднеквадратического отклонения в долях единицы.

Графически поведение интервальной целевой функции (4.12) представлено на рис.

4.2.

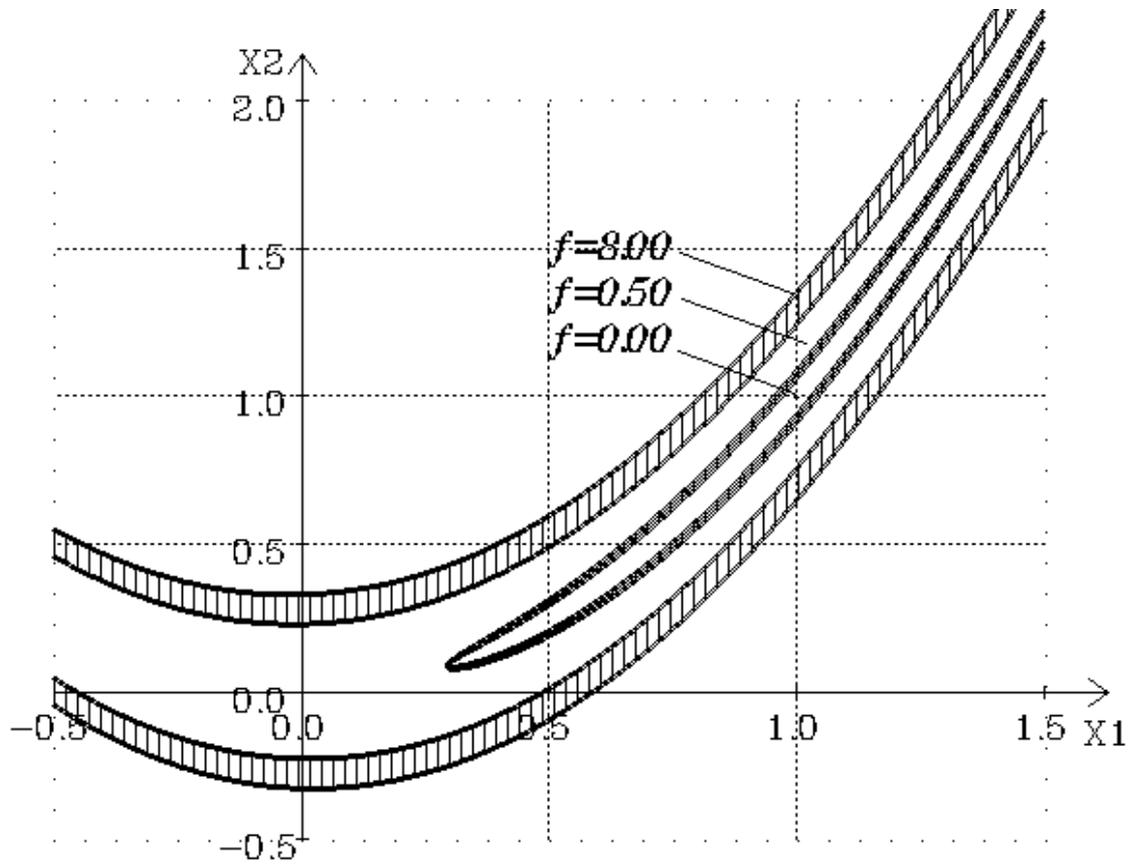


Рис. 4.2. Линии равного уровня интервальной функции Розенброка

Результаты минимизации функции (4.12) представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Результаты минимизации интервальной функции Розенброка

Показатель	α		
	0.005	0.01	0.05
Стартовая точка задачи оптимизации: $x_1^{нач} = -0.5, x_2^{нач} = -0.5$.			
$[F_1^{нач}, F_2^{нач}]$	[58.2, 58.8]*	[57.9, 59.1]	[55.7, 61.3]
Среднее значение: $(F_1^{нач} + F_2^{нач})/2$	58.5	58.5	58.5
Ширина интервала: $(F_2^{нач} - F_1^{нач})$	0.563	1.125	5.625
Оптимальное решение			
$[F_1^{opt}, F_2^{opt}]$	$[0.543, 0.544] \cdot 10^{-3}$	$[0.467, 0.472] \cdot 10^{-3}$	$[0.331, 0.346] \cdot 10^{-3}$
Среднее значение: $(F_1^{opt} + F_2^{opt})/2$	$0.544 \cdot 10^{-3}$	$0.47 \cdot 10^{-3}$	$0.339 \cdot 10^{-3}$
Ширина интервала: $(F_2^{opt} - F_1^{opt})$	$0.001 \cdot 10^{-3}$	$0.005 \cdot 10^{-3}$	$0.015 \cdot 10^{-3}$
x_1^{opt}	1.022	1.015	0.986
x_2^{opt}	1.044	1.029	0.971
Количество итераций	3900		

* - данные округлены.

Из табл. 4.2 видно, что решение интервальной задачи оптимизации с помощью предложенного метода также дает хорошие результаты. Средняя погрешность величины оптимума составила $3.4 \cdot 10^{-4}$, а средняя погрешность значений координат - $1.4 \cdot 10^{-2}$ и $2.9 \cdot 10^{-2}$. Весьма малой получилась ширина интервала оптимума - $1.5 \cdot 10^{-5}$.

Для тестирования метода в нечетко-интервальной задаче оптимизации исходная целевая функция (4.10) была представлена в следующем нечетко-интервальном виде:

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2) &= [F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2), F_3(x_1, x_2), F_4(x_1, x_2)] = \\
 &= [c - c \cdot \alpha, c - c \cdot \alpha / 2, c + c \cdot \alpha / 2, c + c \cdot \alpha] \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

где $F_1, F_4, (c-c\cdot\alpha), (c+c\cdot\alpha)$ – верхние и нижние границы интервалов возможных значений; $F_2, F_3, (c-c\cdot\alpha/2), (c+c\cdot\alpha/2)$ – верхние и нижние границы интервалов наиболее вероятных значений.

Результаты минимизации функции (4.13) представлены в табл. 4.3.

Таблица 4.3. Результаты минимизации нечетко-интервальной функции Розенброка

Показатель	α		
	$\alpha_{\text{верх}} = 0.0025$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0.005$	$\alpha_{\text{верх}} = 0.005$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0.01$	$\alpha_{\text{верх}} = 0.025$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0.05$
Стартовая точка задачи оптимизации: $x_1^{\text{нач}} = -0.5, x_2^{\text{нач}} = -0.5$.			
$[F_1^{\text{нач}}, F_2^{\text{нач}}, F_3^{\text{нач}}, F_4^{\text{нач}}]$	[58.2, 58.4, 58.6, 58.8]	[57.9, 58.2, 58.8, 59.1]	[55.7, 57.1, 59.9, 61.3]
Среднее значение:	58.5	58.5	58.5
Ширина интервала:	0.328	0.656	3.281
Оптимальное решение			
$[F_1^{\text{опт}}, F_2^{\text{опт}}, F_3^{\text{опт}}, F_4^{\text{опт}}]$	[0.347, 0.348, 0.349, 0.350]·10 ⁻³	[0.442, 0.443, 0.447, 0.448]·10 ⁻³	[0.367, 0.376, 0.395, 0.404]·10 ⁻³
Среднее значение:	0.349 · 10 ⁻³	0.445 · 10 ⁻³	0.385 · 10 ⁻³
Ширина интервала:	0.002 · 10 ⁻³	0.004 · 10 ⁻³	0.022 · 10 ⁻³
$x_1^{\text{опт}}$	0.992	0.989	0.997
$x_2^{\text{опт}}$	0.982	0.977	0.992
Количество итераций	3900		

Данные табл.4.3 также свидетельствуют о хороших результатах, полученных при решении нечетко-интервальной задачи оптимизации.

В целом, результаты тестирования позволяют судить о высокой эффективности предложенного метода оптимизации. При этом применение интервального и нечетко-интервального подходов к учету неопределенности исходных данных не требуют даже увеличения числа итераций при реализации алгоритма поиска экстремума.

Одной из особенностей рассмотренного подхода является то, что метод дает возможность оценки степени выполнения используемых при постановке и решении задач

ограничений. Например, с точки зрения минимизации целевой функции на каждом шаге алгоритма минимизации важно, в сущности, лишь уменьшение этой целевой функции без оценки степени этого уменьшения.

В то же время ограничения типа интервальных или нечетко-интервальных неравенств могут иметь разную степень «мягкости» или «жесткости» их выполнения. Например, некоторые ограничения могут требовать практически стопроцентного их выполнения (с вероятностью 0.95-0.99). Для других, не таких строгих ограничений, могут использоваться вероятности немногим более 0.5. Предлагаемый подход позволяет решить описанную проблему.

Процесс расширения (трансформации) детерминированной модели к нечеткому виду осуществляется в несколько этапов:

1. Определяется перечень неопределенных параметров. Для каждого такого параметра выявляется характер неопределенности (статистический характер исходных данных, погрешность приборов, нестабильность факторов, слабая изученность объектов, субъективность оценок лиц, принимающих решение и др.). На основе этого собирается информация о поведении данного параметра: определяются возможные и наиболее вероятные диапазоны варьирования, выполняется построение доверительных интервалов, частотных распределений и др.

2. Выбирается соответствующий способ формализации неопределенностей, основанный на характере имеющейся информации. Если достаточно точно известны лишь границы допустимых значений анализируемого параметра, неизвестные параметры модели описываются четкими интервалами, которые могут быть интерпретированы как частный случай нечетких интервалов. При наличии дополнительной качественной информации о значениях параметра внутри интервала, математическая формализация может быть реализована с помощью нечетких интервалов. При наличии информации о значениях параметров виде плотностей распределения вероятностей $f(X)$, последние преобразуются в трапецеидальные нечетко-интервальные функции принадлежности $\mu(X)$. Таким образом, указанные три базовых способа формализации неопределенности приводятся к единой форме представления в виде нечетких интервалов.

При этом при применении нечетко-интервального подхода важное значение имеет также определение на начальном этапе количества α -уровней, на которые будут разбиваться нечеткие числа. Принятое число α -уровней должно быть одинаковым для всех нечетких чисел модели. На практике наиболее часто применяется четырехреперная форма представления нечетких чисел, при применении которой не требуется значительных

вычислительных затрат. При построении числа в таком виде необходимо задать его верхний и нижний интервалы значений. При этом исходят из следующих соображений: верхний интервал должен охватывать область наиболее вероятных значений (около 50% значений варьируемой случайной величины), а нижний - область возможных значений (95-99% вероятности нахождения).

3. В соответствии с разработанной базовой методикой оптимизации интервальных (нечетко-интервальных) функций все нечеткие параметры модели, включая целевую функцию и ограничения, заменяются их интервальными (нечетко-интервальными) аналогами, построенными на предыдущем этапе. Оперирование интервальными числами осуществляется с помощью наиболее распространенного варианта интервальной арифметики, основанного на трактовке четких интервалов как отрезков прямой. Оперирование нечетко-интервальными числами осуществляется посредством разложения нечетких чисел на α -уровни и оперирования с границами полученных четких интервалов, соответствующих α -уровням.

4. Следующим этапом является выполнение оптимизации с помощью метода случайного поиска. При этом реализуются прямые выборочные процедуры с уменьшением интервала поиска, модифицированные применительно к интервальным (нечетко-интервальным) функциям. В процессе оптимизации на основе интервальных (нечетко-интервальных) целевых функций для сравнения текущего значения целевой функции с оптимальным, найденным на предыдущих шагах, а также при проверке решения на допустимость, применяются разработанные правила сравнения четких и нечетких интервалов, позволяющие определять вероятность превосходства (доминирования) одного интервала над другим интервалом или обычным числом. При наличии ограничений предварительно необходимо определить степень «мягкости» или «жесткости» их выполнения.

5. При наличии значительной неопределенности полученного результата, что при интервальном подходе выражается большой шириной выходного интервала, задачу целесообразно переформулировать и представить в двухкритериальной форме на основе введения частных критериев увеличения эффективности (снижения затрат) и минимизации риска, понимаемого как неопределенность результата. Для решения таких двухкритериальных задач целесообразно использовать представленную в главе 1 методику оптимизации интервальных (нечетко-интервальных) функций с одновременным снижением неопределенности результата. На основе этой методики проводится двухкритериальное сравнение интервалов с учетом вероятности превосходства (доминирования) одного

интервала над другим и их размеров. Необходимо отметить, что при постановке двухкритериальной задачи важное значение имеет адекватный выбор рангов (коэффициентов относительной важности) соответствующих частных критериев.

4.2. Базовая методика нечеткой оптимизации совместной работы энергоагрегатов, использующих комбинированное топливо

Рассмотрим задачу оптимизации совместной работы двух энергоагрегатов, выделенных в блочную структуру. Такая задача является типичной при оптимизации режимов работы энергосистем, и может, в определенной степени, рассматриваться как модельная [111].

Положим, что каждый из энергоблоков может работать на газе, жидком топливе или в любом их сочетании. Суммарная мощность, развиваемая обоими энергоблоками, должна быть постоянной величиной. На потребление газа накладываются ограничения внешнего характера. Требуется найти режимы работы каждого энергоблока такие, чтобы минимизировать потребление жидкого топлива.

Задача оптимизации ставится для реальных функционирующих энергоблоков. Полагается, что исходные данные формируются как на основе сбора статистической информации о работе агрегатов, так и путем проведения натуральных испытаний. Такие исходные данные характеризуются существенными неопределенностями: неточным значением параметров агрегатов и режимов работы, недостаточностью информации о протекающих процессах, случайным характером поведения системы. В этих условиях математические модели функционирования энергоагрегатов строятся на основе статистической обработки исходной информации в виде регрессионных полиномов второй степени. Известно, что в параметры таких моделей определяются с точностью до интервала [100].

В качестве выходных переменных моделей выберем расходы газа и жидкого топлива энергоблоков. При этом входными переменными будут мощности энергоустановок. Мощности энергоблоков будем полагать нечетко определенными величинами.

Для реальных энергоблоков с суммарной мощностью 50 МТВт затраты жидкого топлива w_1 и газа w_2 в тоннах условного топлива в час на первый энергоблок описываются следующими регрессионными зависимостями:

$$w_1(x_1) = 1.4609 + 0.15186 * x_1 + 0.00145 * x_1^2, \quad (4.14)$$

$$w_2(x_1) = 1.5742 + 0.1631 * x_1 + 0.001358 * x_1^2, \quad (4.15)$$

где x_1 — выходная мощность первого энергоблока в Мвт.

Аналогично для второго энергоблока затраты жидкого топлива y_1 и газа y_2 при мощности x_2 составляют

$$y_1(x_2) = 0.8008 + 0.2031 * x_2 + 0.000916 * x_2^2, \quad (4.16)$$

$$y_2(x_2) = 0.7266 + 0.2256 * x_2 + 0.000778 * x_2^2, \quad (4.17)$$

где x_2 — выходная мощность второго энергоблока в Мвт.

В соответствии с эксплуатационными характеристиками энергоблоков, x_1 и x_2 могут изменяться в диапазонах

$$18 \leq x_1 \leq 30, \quad (4.18)$$

$$14 \leq x_2 \leq 25. \quad (4.19)$$

Результаты режимно-наладочных испытаний показали, что разные виды топлива с некоторой степенью приближения могут комбинироваться аддитивным образом, т.е. для любого значения выходной мощности x_J^* любая линейная комбинация топливных компонент

$$\lambda_1 \cdot w_1(x_J^*) + (1 - \lambda_1) \cdot w_2(x_J^*),$$

где $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, также дает мощность, равную x_J^* .

Подобное утверждение верно и для энергоблока 2.

Задачу оптимизации теперь сформулируем следующим образом: требуется определить мощности каждого энергоблока x_1 и x_2 и доли использования разных видов топлива λ_1 и λ_2 такие, чтобы минимизировать общее потребление жидкого топлива:

$$\xi(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 * w_1(x_1) + \lambda_2 * y_1(x_2) \rightarrow \min \quad (4.20)$$

при ограничениях:

на использование газа

$$G(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (1-\lambda_1)*w_2(x_1) + (1-\lambda_2)*y_2(x_2) \leq 10, \quad (4.21)$$

на суммарную мощность

$$x_1 + x_2 = 50, \quad (4.22)$$

а также на относительные расходы топлива

$$0 \leq \lambda_1 \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq 1. \quad (4.23)$$

Используя равенство (4.22), исключим переменную x_2 и объединяя ограничения (4.18), (4.19), (4.22), сводим исходную постановку к задаче оптимизации, содержащей только три переменные.

В новой постановке требуется найти значения $x_1, \lambda_1, \lambda_2$, минимизирующие целевую функцию, отражающую потребление жидкого топлива:

$$f(x_1, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1*w_1(x_1) + \lambda_2*y_1(50 - x_1) \rightarrow \min, \quad (4.24)$$

при ограничениях

$$25 \leq x_1 \leq 30, \quad 0 \leq \lambda_1 \cdot \lambda_2 \leq 1 \quad (4.25)$$

Зависимости $w_1(x_1)$ и $y_1(x_2)$ построены на основе статистического анализа и обработки данных, полученных при натурных испытаниях энергоагрегатов. Для учета неопределенностей, связанных со статистическим характером коэффициентов регрессионных зависимостей, последние представим в интервальном виде. Будем использовать доверительные интервалы для всех коэффициентов регрессионных полиномов.

Используя общую методологию интервального анализа, рассмотренную в главе 1, представим интервальное расширение выражения (4.14) в виде:

$$\begin{aligned}
w_1(x_1) = & [\underline{w_1(x_1)}, \overline{w_1(x_1)}] = [1.4609 - 1.4609\alpha, 1.4609 + 1.4609\alpha] + \\
& + [0.15186 - 0.15186\alpha, 0.15186 + 0.15186\alpha] x_1 + \\
& + [0.00145 - 0.00145\alpha, 0.00145 + 0.00145\alpha] x_1^2. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

где α - оценка среднеквадратического отклонения коэффициентов в долях единицы.

Величина α может быть определена как в результате анализа статистических данных, так и методом экспертных оценок.

Минимизируемая функция (4.24) для интервального расширения запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
F(x_1, \lambda_1, \lambda_2) = & [\underline{F(x_1, \lambda_1, \lambda_2)}, \overline{F(x_1, \lambda_1, \lambda_2)}] = \\
= & \lambda_1 \cdot [\underline{w_1(x_1)}, \overline{w_1(x_1)}] + \lambda_2 \cdot [\underline{y_1(50 - x_1)}, \overline{y_1(50 - x_1)}]. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Аналогично преобразовываются ограничения (4.25).

Результаты решения задачи (4.27) с соответствующими ограничениями приведены в табл. 4.4.

Для поиска минимума использовался рассмотренный выше метод случайного поиска «прямые выборочные процедуры с уменьшением интервала поиска», модифицированный применительно к интервальным данным. В процессе реализации алгоритма сравнения интервалов при проверке ограничений полагали, что один интервал больше другого, если вероятность этого события больше либо равна 95%.

Таблица 4.4. Результаты оптимизации с учетом интервальной неопределенности

	Среднеквадратичное отклонение α			
	0	0.005	0.01	0.05
Стартовая точка задачи оптимизации: $x_1^{onm}=27.5$, $\lambda_1^{onm}=0.5$, $\lambda_2^{onm}=0.5$.				
$[\underline{F}_{нач}; \overline{F}_{нач}]$	6.284	[6.253, 6.315]	[6.221, 6.347]	[5.97, 6.598]
Среднее значение интервала: $(\underline{F}_{нач} + \overline{F}_{нач})/2$	6.284	6.284	6.284	6.284
Ширина исходного интервала: $(\overline{F}_{нач} - \underline{F}_{нач})$	0	0.063	0.126	0.628
Оптимальное решение				
$[\underline{F}_{min}; \overline{F}_{min}]$	3.0 52	[3.084, 3.115]	[3.114, 3.177]	[3.326, 3.676]
Среднее значение интервала: $(\underline{F}_{min} + \overline{F}_{min})/2$	3.052	3.0995	3.145	3.501
Ширина оптимального интервала: $(\overline{F}_{min} - \underline{F}_{min})$	0	0.031	0.063	0.35
x_1^{onm}	29.997	29.997	30	29.999
λ_1^{onm}	0	0.001	0	0
λ_2^{onm}	0.583	0.592	0.601	0.661

Для наглядности полученное оптимальное решение и исходная стартовая точка задачи оптимизации графически представлены на рис. 4.3.

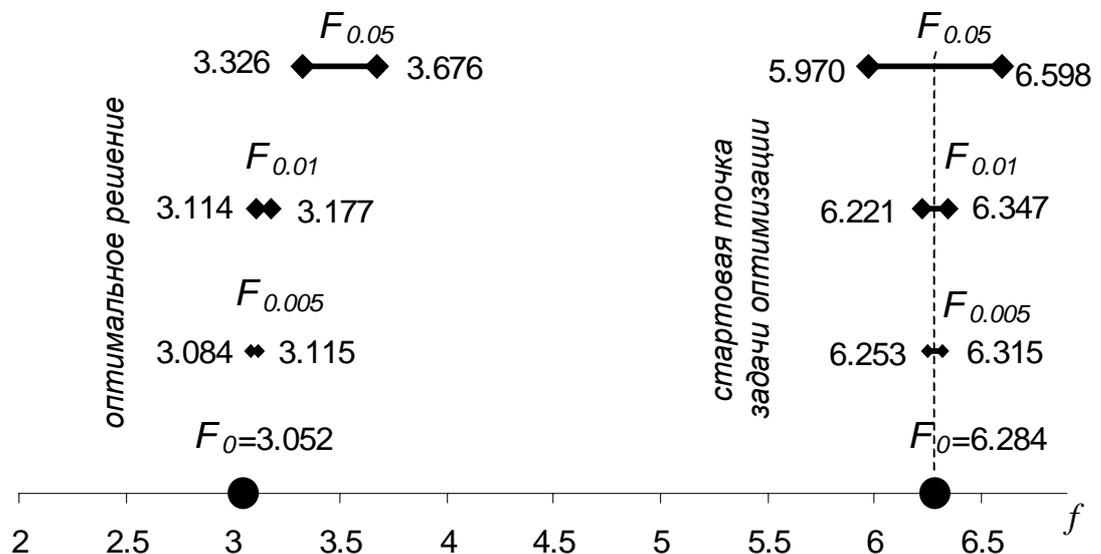


Рис. 4.3. Целевая функция в стартовой точке алгоритма поиска оптимума и в точке оптимума: $F_0 = f$ – оптимальное решение при $\alpha=0$ (неинтервальный вариант); $F_{0.005}$ – оптимальное решение при $\alpha=0.005$; $F_{0.01}$ – оптимальное решение при $\alpha=0.01$; $F_{0.05}$ – оптимальное решение при $\alpha=0.05$.

Видно, что происходит сдвиг оптимального интервала в сторону ухудшения оптимума (увеличения F) по мере увеличения α . В результате оптимальное интервальное решение является несимметричным и не охватывает значение оптимума в неинтервальном варианте, в то время как стартовые точки задачи оптимизации для интервальных вариантов симметричны относительно неинтервального варианта (рис. 4.3). Полученный результат можно объяснить следующим образом.

Для решения неинтервальной задачи ($\alpha=0$) оптимальным решением является расход газа $G_0=10$. В реальных условиях параметры выражения (4.21), используемого для расчета G_0 , характеризуются некоторой неопределенностью, и могут быть представлены интервалами. Если в точке оптимума неинтервальной задачи подставить в выражение (4.21) интервальные коэффициенты, например, при $\alpha=0.05$, то в результате получим интервальную оценку $G'_{0.05}=[9.5, 10.5]$. Это оценка означает, что существует ненулевая вероятность того, что в результате влияния неопределенных факторов расход газа превысит 10 ед. Таким образом использование результатов решения неинтервальной задачи оптимизации приводит к нарушению ограничения (4.21).

В интервальном варианте задачи оптимизации для $\alpha=0.05$ получаем оптимальный интервальный расход газа $G_{0.05}=[9.091, 10.048]$, естественно отличающийся от оцененного на основе неинтервального варианта $G'_{0.05}$. Интервал $G_{0.05}$ с вероятностью 0.95 меньше 10. Следовательно, при применении интервального подхода к учету неопределенности исходных данных с вероятностью 0.95 гарантируется выполнение ограничения (4.21) посредством уменьшения расхода газа (рис. 4.4), которое достигается за счет увеличения доли потребления жидкого топлива вторым агрегатом λ_2^{opt} с 0.583 до 0.661, что и приводит в итоге к некоторому увеличению среднеинтервальных значений целевой функции в точке оптимума для интервальных формулировок задачи оптимизации. Ясно, что это увеличение растёт с возрастанием неопределенности (ширины интервалов) исходных данных.

Таким образом, если не учитывать интервальный характер исходных данных, то полученного при $\alpha=0$ количества жидкого топлива 3.052 ед. скорее всего не хватит для обеспечения бесперебойной работы энергоблоков в течение часа (не будут удовлетворены

ограничения). Учет интервального характера данных (например, $\alpha=0.05$) позволяет определить необходимое оптимальное количество жидкого топлива для бесперебойной работы энергоблоков (3.676 ед.). Это дает возможность прогнозировать, в каких реальных пределах должен быть оптимальный расход топлива (от 3.326 до 3.676 ед.).

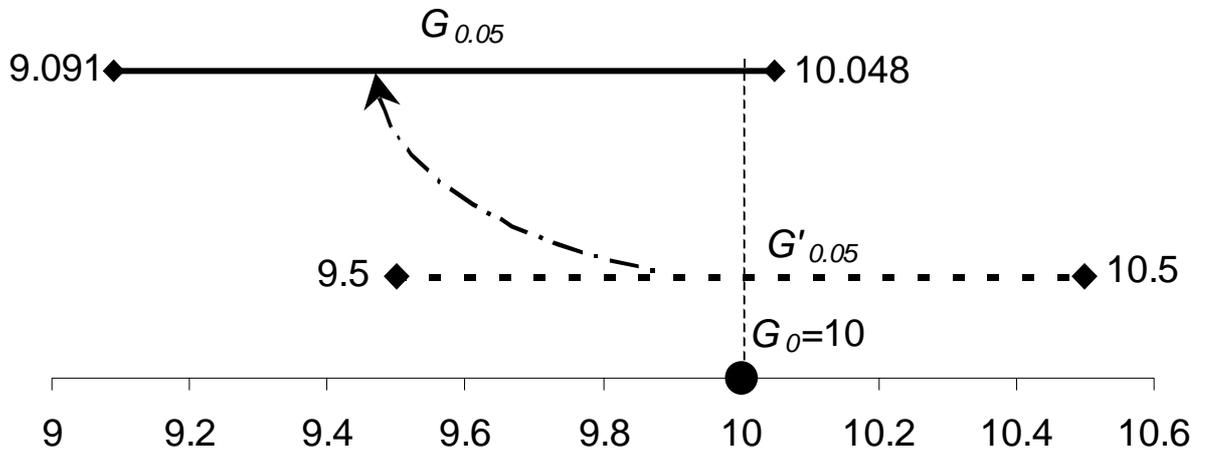


Рис. 4.4. Интервальные ограничения при решении задачи с учетом интервальной неопределенности

Разработанная методика математического моделирования и оптимизации в условиях интервальной неопределенности параметров моделей позволяет при решении задачи оптимизации совместной работы энергоагрегатов получать более отвечающие реальной ситуации результаты, чем при использовании традиционных подходов.

В случаях, когда имеется достаточно информации для описания неопределенных параметров моделей в виде нечетких чисел, описанная выше методика модифицируется применительно к нечетко-интервальным данным.

В этом случае регрессионные зависимости типа (4.14) принимают следующий вид:

$$F(x) = [F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x)] = [a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{04}] + [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}] \cdot x + [a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}] \cdot x^2, \quad (4.28)$$

где F_1 и F_4 , a_{j1} и a_{j4} , $j=0..2$ - интервал возможных значений; F_2 и F_3 , a_{j2} и a_{j3} , $j=0..2$ - интервал наиболее вероятных значений.

Выражение (4.28) соответствует нечеткому расширению с результирующими трапецидальными нечеткими интервалами, описанными в главе 1. $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ -

реперные точки трапецеидального нечеткого интервала. Аналогично ($t \rightarrow [t_1, t_2, t_3, t_4]$) преобразуются целевая функция и ограничения. Таким образом, задача сводится к минимизации нечетко-интервальной целевой функции при наличии нечетко-интервальных ограничений.

Данные, полученные в результате решения задачи с учетом нечетко-интервальной неопределенности исходных данных, представлены в табл. 4.5. Значения начального и оптимального решений и расхода газа для четкого и нечеткого (при $\alpha_{верх}=0.025$ и $\alpha_{ниж}=0.05$) вариантов представлены на рис. 4.5 и рис. 4.6.

Анализ результатов оптимизации с учетом нечетко-интервальной неопределенности приводит к тем же качественным выводам, что и при анализе интервального варианта. Так, при представлении выражения (4.21), используемого для расчета G_0 в нечетко-интервальном виде (например, при $\alpha_{верх} = 0.025$, $\alpha_{ниж} = 0.05$), для расхода газа в точке оптимума неинтервальной задачи получим нечетко-интервальную оценку $G'_{0.05}=[9.5, 9.75, 10.25, 10.5]$. Последнее, аналогично интервальному варианту, свидетельствует, что при применении результатов решения неинтервальной задачи оптимизации существует вероятность того, что в результате влияния неопределенных факторов расход газа превысит 10 ед., что приведет к невыполнению ограничения (4.21).

В нечетко-интервальном варианте задачи оптимизации для $\alpha_{верх} = 0.025$, $\alpha_{ниж} = 0.05$ получаем оптимальный нечетко-интервальный расход газа $G_{0,05}=[9.257, 9.501, 9.988, 10.231]$, естественно отличающийся от оцененного на основе неинтервального варианта $G'_{0.05}$. Нечеткий интервал $G_{0,05}$ с вероятностью 0.95 меньше 10. Таким образом, при применении нечетко-интервального подхода к учету неопределенности исходных данных с вероятностью 0.95 гарантируется выполнение ограничения (4.21) посредством уменьшения расхода газа (рис. 4.6), которое достигается за счет увеличения доли потребления жидкого топлива вторым агрегатом λ_2^{opt} от 0.583 до 0.63, что и приводит в итоге к некоторому увеличению среднеинтервальных значений целевой функции в точке оптимума для нечетко-интервальных формулировок задачи оптимизации. Ясно, что это увеличение растет с возрастанием неопределенности (ширины нечетких интервалов) исходных данных.

Таблица 4.5. Результаты оптимизации с учетом нечетко-интервальной неопределенности

	$\alpha_{\text{верх}} = 0$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0$	$\alpha_{\text{верх}} = 0.0025$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0.005$	$\alpha_{\text{верх}} = 0.005$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0.01$	$\alpha_{\text{верх}} = 0.025$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0.05$
Стартовая точка задачи оптимизации: $x_1^{\text{opt}}=27.5$, $\lambda_1^{\text{opt}}=0.5$, $\lambda_2^{\text{opt}}=0.5$.				
$[F_1^{\text{нач}}, F_2^{\text{нач}}, F_3^{\text{нач}}, F_4^{\text{нач}}]$	6.284	[6.253, 6.268, 6.3, 6.315]	[6.221, 6.253, 6.315, 6.347]	[5.97, 6.127, 6.441, 6.598]
Среднее значение интервала	6.284	6.284	6.284	6.284
Ширина начального интервала	0	0.037	0.073	0.367
Оптимальное решение				
$[F_1^{\text{мин}}, F_2^{\text{мин}}, F_3^{\text{мин}}, F_4^{\text{мин}}]$	3.052	[3.072, 3.08, 3.095, 3.103]	[3.091, 3.107, 3.138, 3.153]	[3.128, 3.211, 3.375, 3.458]
Среднее значение	3.052	3.087	3.122	3.293
Ширина интервала	0	0.018	0.036	0.192
x_1^{opt}	29.999	29.999	30	30
λ_1^{opt}	0	0	0	0
λ_2^{opt}	0.583	0.590	0.597	0.630

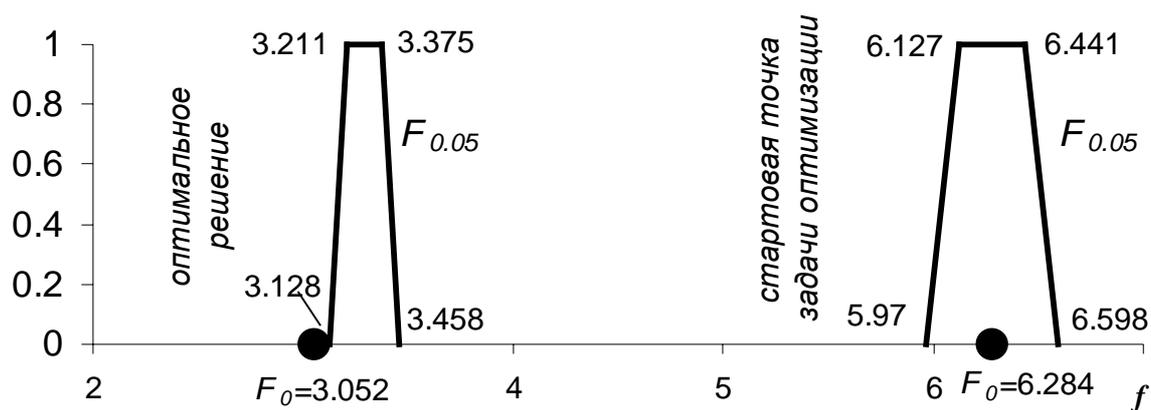


Рис. 4.5. Начальное и оптимальное решения задачи с учетом нечетко-интервальной неопределенности

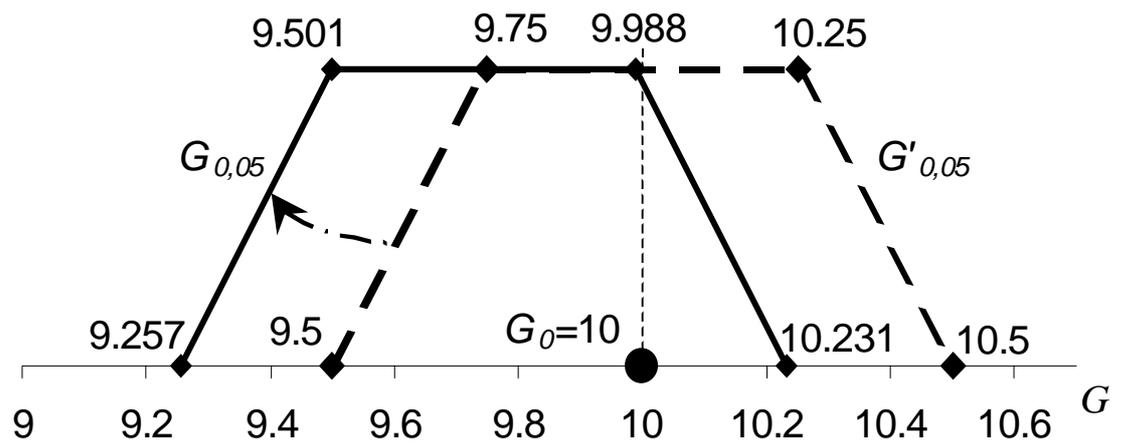


Рис. 4.6. Проверка ограничений при решении задачи с учетом нечетко-интервальной неопределенности

Таким образом, учет нечетко-интервального характера данных (например, при $\alpha_{верх} = 0.025$, $\alpha_{ниж} = 0.05$) позволяет определить необходимое количество жидкого топлива для бесперебойной работы энергоблоков (3.458 ед.) и таким образом обеспечить возможность их надежного функционирования. Это дает возможность определить пределы (интервалы), в которых будет израсходовано топливо [3.128, 3.458], и заранее планировать определенное увеличение предстоящих финансовых расходов. Использование нечетких интервалов, в отличие от четких, позволяет не только узнать возможные пределы искомой величины, но также определить наиболее вероятный интервал значений [3.211, 3.375], что дает более реалистичное представление об исследуемой проблеме.

4.3. Постановка задачи оптимизации работы совокупности энергоагрегатов в условиях неопределенности

Проблема энергосбережения в настоящее время представляет собой стратегическое направление деятельности не только отдельных предприятий, но и экономической политики государства в целом. Одним из основных важнейших направлений энергосбережения является снижение затрат топливных ресурсов на производство энергии

Рассмотрим задачу оптимизации работы группы котлоагрегатов: определение оптимального состава, паровых нагрузок и доли использования различных видов топлива каждым из них. В качестве критериев оптимизации режимов работы энергоагрегатов будем принимать следующие: максимум КПД теплоисточника; минимум расхода условного топлива; минимум материальных затрат на используемое топливо. Косвенно при этом

учитываются критерии экологического характера, поскольку они непосредственно связаны с критерием минимизации расхода топлива.

Исходными данными для задачи оптимизации являются: энергетические характеристики и параметры, полученные при режимно-наладочных испытаниях, статистические показатели работы энергоагрегатов, экономические факторы, а также характеристики используемого топлива, условия эксплуатации и другие необходимые для расчетов параметры. Для получения конкретных значений требуемых исходных данных необходимо собрать и обработать эту разноплановую информацию.

Схема информационных потоков, формирующих состав данных, необходимый для задачи оптимизации, представлена на рис. 4.7.

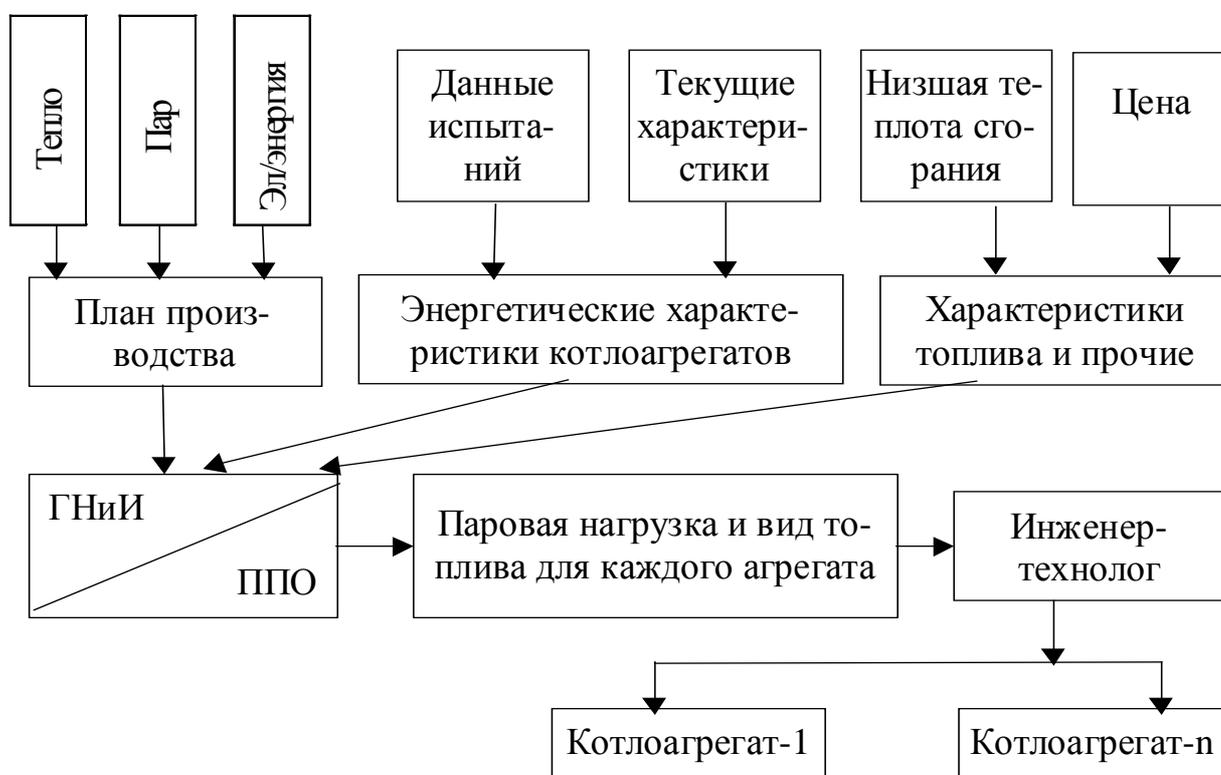


Рис. 4.7. Схема потоков информации при осуществлении процесса оптимизации режимов работы энергоагрегатов: ГНИИ – группа наладки и испытаний; ППО – прикладное программное обеспечение

В соответствии со структурой представленной на рис. 4.7 определяется суммарный план производства пара на основе заявок потребителей с учетом потерь при передаче энергии от производителя к потребителю. План включает:

- 1) объем производства тепла (пара) для технологических нужд предприятий;

- 2) объем производства пара для производства электроэнергии;
- 3) объем производства тепла для отопления и вентиляции;
- 4) объем производства тепла на горячее водоснабжение.

Группа наладки и испытаний (ГниИ) анализирует данные о практической работоспособности котлоагрегатов, их энергетические характеристики (КПД, расход топлива) и др. и определяет оптимальные режимы работы энергоагрегатов: находит оптимальный состав, распределяет заданную паровую нагрузку между отдельными агрегатами и определяет оптимальную долю (вид) топлива для каждого агрегата. Инженеры-технологи, используя разработанные режимные карты, настраивают агрегаты на обеспечение заданной паровой нагрузки в соответствии с полученным режимом работы. Экономисты определяют цену и другие показатели рентабельности работы энергопредприятия.

Используемые далее конкретные данные относятся к условиям функционирования Могилевской ТЭЦ-2, которая служила базой внедрения описанных ниже методик оптимизации. Могилевская ТЭЦ-2 является типичным энергетическим предприятием, и полученные результаты справедливы для других ТЭЦ и при некоторой модификации для котельных.

Для данной задачи, как и для большинства других реальных прикладных задач, существует проблема учета неопределенности исходных данных. Причинами неопределенности являются статистический характер исходных данных, полученных в результате натурных испытаний котлоагрегатов, нестабильность характеристик, погрешность приборов и другие, в том числе, субъективные факторы.

Рассмотрим постановку задачи применительно к теплоэлектроцентрали, в которой установлено n котлов, k из которых способны работать на жидком топливе или газе, а также на комбинированном топливе в любом сочетании жидкого топлива и газа ($k \leq n$) [60]. Учтем, что текущая суммарная паропроизводительность котлов D_K (тонн/час) ограничивается снизу планом работы потребителей.

Выделим следующие параметры, которые должны быть учтены в математической модели расчета энергетических характеристик котлов в зависимости от конструкции оборудования, сжигаемого топлива, условий эксплуатации:

- 1) вид, марка и характеристики сжигаемого топлива: низшая теплота сгорания Q_n^P , ккал/кг (кДж/кг) или ккал/м³ (кДж/ м³); влажность на рабочую массу W_p , %; температура мазута, подаваемого в топку котла t_{ml} , °С; цена единицы топлива, у.д.е./т или у.д.е./тыс. м³;

2) параметры, определяемые при тепловом расчете котельных агрегатов: теоретический объем сухого воздуха, необходимый для полного сгорания топлива V^0 , н.м³/кг; нормативная температура холодного воздуха $t_{х.в.}$, °С; нормативные присосы воздуха в газовый тракт $\Delta\alpha_H$ и в топку $\Delta\alpha_H^T$; нормативные потери тепла корпусом котла в окружающую среду при номинальной часовой паропроизводительности q_5^H ; теплосодержание перегретого i_{ne} пара и питательной воды i_{ne} , ккал/кг (кДж/кг);

3) нормативные характеристики и параметры, определяемые при режимно-наладочных испытаниях энергоагрегатов: теплосодержание котловой воды $i_{кв}$, ккал/кг (кДж/кг); температура воздуха после воздухоподогревателей $t_{кф}^{\prime\prime}$, °С; температура уходящих газов $t_{ух}$, °С; коэффициент избытка воздуха в режимном сечении α_{pc} ; потери тепла с химическим недожогом топлива q_3 , %;

4) корректирующие параметры, замеряемые в процессе эксплуатации при текущем режиме работы: теплосодержание котловой воды $i_{кв}$, ккал/кг (кДж/кг); температура воздуха после воздухоподогревателей $t_{кф}^{\prime\prime}$, °С; температура уходящих газов $t_{ух}$, °С; коэффициент избытка воздуха в режимном сечении α_{pc} ; потери тепла с химическим недожогом топлива q_3 , %; присосы воздуха в газовый тракт $\Delta\alpha$ и в топку $\Delta\alpha^T$; температура холодного воздуха $t_{х.в.}$, °С.

5) входные управляемые переменные: состав загружаемых агрегатов; паровая нагрузка для каждого агрегата; доли использования различных видов топлива.

6) выходные параметры: оптимальный состав загружаемых агрегатов; оптимальная паровая нагрузка для каждого агрегата; оптимальные доли использования различных видов топлива каждым агрегатом;

7) Критерии эффективности функционирования системы: оптимальный КПД котельной установки; оптимальный расход условного топлива; оптимальные финансовые затраты на обеспечение заданной паровой нагрузки;

8) Другие факторы, характеризующие индивидуальные особенности установок и влияющие на экономичность работы котла.

Для выделенных характеристик методами регрессионного анализа были установлены их функциональные зависимости от текущей паровой нагрузки котлоагрегатов. В ходе

анализа было выявлено, что по критерию остаточной дисперсии наиболее удовлетворительным видом функциональных зависимостей являются регрессионные полиномы третьей степени:

$$f_i(D_{Ki}) = a_0^i + a_1^i \cdot D_{Ki} + a_2^i \cdot D_{Ki}^2 + a_3^i \cdot D_{Ki}^3. \quad (4.29)$$

Сформулируем целевую функцию критерия максимума КПД. Коэффициент полезного действия группы котлоагрегатов $\eta_{KY}^{\text{бp}}$ определим как средневзвешенную величину КПД всех агрегатов:

$$\eta_{KY}^{\text{бp}}(\{D_K\}) = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_{Ki}^{\text{бp}}(D_{Ki}) \cdot Q_{Ki}^{\text{бp}}(D_{Ki})}{\sum_{i=1}^n Q_{Ki}^{\text{бp}}(D_{Ki})}, \quad (4.30)$$

где $\{D_K\} = \{D_{K1}, D_{K2}, \dots, D_{Kn}\}$ – вектор паропроизводительностей всех n агрегатов; $\eta_{Ki}^{\text{бp}}(D_{Ki})$ – КПД i -го агрегата (независимо от используемого топлива); $Q_{Ki}^{\text{бp}}(D_{Ki})$ – теплопроизводительность i -го агрегата.

Теплопроизводительность в (4.30) определяется на основе и паропроизводительности следующим соотношением:

$$Q_K^{\text{бp}}(D_K) = D_K \cdot (i_{ne} - i_{ne}) + G_{н.нр} \cdot (i_{кв} - i_{ne}),$$

где $G_{н.нр} = 0.01 D_K$ (тонн/час) – расход воды на непрерывную продувку; i_{ne} – энтальпия (теплосодержание) перегретого пара (при давлении $P_{ne} = 110$ кгс/см² и температуре $t_{ne} = 535$ °С имеем $i_{ne} = 825.05$ ккал/кг); i_{ne} – энтальпия питательной воды (при давлении $P_{ne} = 180$ кгс/см² и температуре $t_{ne} = 230$ °С имеем $i_{ne} = 237.4$ ккал/кг); $i_{кв}$ – энтальпия котловой воды, ккал/кг.

Энтальпия перегретого пара и питательной воды определяется по таблицам теплофизических свойств воды и водяного пара в зависимости от давления и температуры пара (воды). Последние находятся из теплового расчета и для обеспечения на выходе заданных параметров пара в процессе работы энергоагрегатов поддерживаются на требуемом уровне. Энтальпия котловой воды определяется ее зависимостью от давления и температуры воды в барабане, которые измеряются при режимно-наладочных испытаниях.

Целевую функцию критерия минимума расхода условного топлива построим в виде:

$$B^{ysl}(\{D_K\}) = \sum_{i=1}^n B_i^{ysl}(D_{Ki}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \cdot B_i(D_{Ki}), \quad (4.31)$$

где $B_i^{ysl}(D_{Ki})$ - расход условного топлива для обеспечения текущей паропроизводительности D_{Ki} i -ым парогенератором; $B_i(D_{Ki})$ - затраты натурального топлива на обеспечение заданной паропроизводительности i -ым парогенератором; \mathcal{E} – топливный эквивалент, показывающий, какому количеству условного топлива равноценна единица массы (или объема) того или иного вида натурального топлива.

Топливный эквивалент в (4.31) находится как отношение низшей теплоты сгорания Q_n^p данного топлива к теплоте сгорания условного топлива:

$$\mathcal{E} = \frac{Q_n^p}{7000}$$

Целевую функцию критерия минимума материальных затрат на используемое топливо определим следующим образом:

$$f_{M3}(\{D_K\}) = \sum_{i=1}^n B_i(D_{Ki}) \cdot p, \quad (4.32)$$

где p - цена используемого данным агрегатом вида топлива.

При постановке задачи учтем ограничения на суммарную паропроизводительность:

$$\sum_{i=1}^n D_{Ki} = D_K \quad (4.33)$$

и диапазоны рабочей паропроизводительности для каждого котла:

$$D_{Ki}^{min} \leq D_{Ki} \leq D_{Ki}^{max}, \quad i=1..n. \quad (4.34)$$

Выражения (4.30), (4.31), (4.32) справедливы для работы энергоагрегатов на одном виде топлива. Для решения поставленной задачи необходима модель, описывающая работу энергоагрегатов на комбинированном топливе. Однако в достаточной мере формализованы лишь методики для расчета теплоэнергетических параметров работы энергоагрегатов при

использовании одного вида топлива. В связи с этим был проведен анализ данных режимно-наладочных испытаний котлов при совместном сжигании природного газа и мазута [85]. Проведенный анализ показал, что разные виды топлива с достаточной для практики точностью могут комбинироваться аддитивным образом, т.е. для любого значения паровой нагрузки D_{Ki}^* любая линейная комбинация топливных компонент для i -го котла

$$B_{mi}^* = \lambda_i \cdot B_{mi}(D_{Ki}^*), \quad B_{zi}^* = (1-\lambda_i) \cdot B_{zi}(D_{Ki}^*),$$

также дает мощность, равную D_{Ki}^* .

В приведенных выше выражениях B_{mi}^* , B_{zi}^* - расходы жидкого топлива (тонн/час) и газа (тыс.м³/час), соответственно, обеспечивающие требуемую паропроизводительность D_{Ki}^* тонн/час.

Величины $B_{mi}(D_{Ki}^*)$, $B_{zi}(D_{Ki}^*)$ являются расходами жидкого топлива (тонн/час) и газа (тыс.м³/час), соответственно, при раздельном сжигании топлива для обеспечения паропроизводительности в D_{Ki}^* тонн/час. Параметр λ_i характеризует доли использования разных видов топлива i котлом. В данном случае λ_i - доля жидкого топлива, а $(1-\lambda_i)$ - доля газообразного топлива и

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad (4.35)$$

Следует отметить, что линейная комбинация топливных компонент справедлива для определения и других энергетических характеристик, в том числе и КПД. С учетом этого, целевую функцию (4.30) представим в следующем виде:

$$\eta_{KY}^{\bar{op}}(\{D_K\}, \{\lambda\}) = \frac{\sum_{i=1}^n (\lambda_i \cdot \eta_{Ki/m}^{\bar{op}}(D_{Ki}) + (1-\lambda_i) \cdot \eta_{Ki/z}^{\bar{op}}(D_{Ki})) \cdot Q_{Ki}^{\bar{op}}(D_{Ki})}{\sum_{i=1}^n Q_{Ki}^{\bar{op}}(D_{Ki})}, \quad (4.36)$$

где $\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ - вектор, характеризующий доли использования разных видов топлива всеми n агрегатами; $\eta_{Ki/m}^{\bar{op}}(D_{Ki})$, $\eta_{Ki/z}^{\bar{op}}(D_{Ki})$ - КПД i -го агрегата при работе на мазуте и на газе, соответственно.

Целевую функцию критерия минимума расхода условного топлива (4.31) представим в виде:

$$B^{ysl}(\{D_K\}, \{\lambda\}) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i \cdot \mathcal{E}_m \cdot B_{mi}(D_{Ki}) + (1 - \lambda_i) \cdot \mathcal{E}_z \cdot B_{zi}(D_{Ki})), \quad (4.37)$$

где - \mathcal{E}_m , \mathcal{E}_z – топливные эквиваленты, показывающие какому количеству условного топлива равноценна единица массы (или объема) мазута и газа соответственно.

Целевая функция критерия минимума финансовых затрат на используемое топливо (4.32) принимает вид:

$$f_{M3}(\{D_K\}, \{\lambda\}) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i \cdot B_{mi}(D_{Ki}) \cdot p_m + (1 - \lambda_i) \cdot B_{zi}(D_{Ki}) \cdot p_z), \quad (4.38)$$

где p_m , p_z - цены на жидкое топливо и газ соответственно.

Таким образом, сформулирована задача оптимизации режимов работы энергоагрегатов по одному из критериев(4.36)-(4.38) при совокупности ограничений (4.33), (4.34) и (4.35). В процессе оптимизации необходимо определить $(n-1+k)$ переменных: k переменных - $\lambda_i, i=1..k$; $(n-1)$ переменных - $D_{Ki}, i=1,..,(n-1)$.

Значения D_{Kn} определяются из следующего соотношения:

$$D_{Kn} = D_K - \sum_{i=1}^{n-1} D_{Ki}. \quad (4.39)$$

В следствие большого объема исходных данных и сложности аналитических выражений для расчета теплоэнергетических характеристик, представим модель расчета расхода топлива одним котлоагрегатом в виде иерархической структуры (дерева). Узлами данной структуры являются энергетические характеристики и исходные данные, требуемые для расчета (рис. 4.8).

Учитывая разнокачественный характер неопределенностей в описании исходных данных, для математической формализации неопределенностей выберем методы нечетко-интервальной математики.

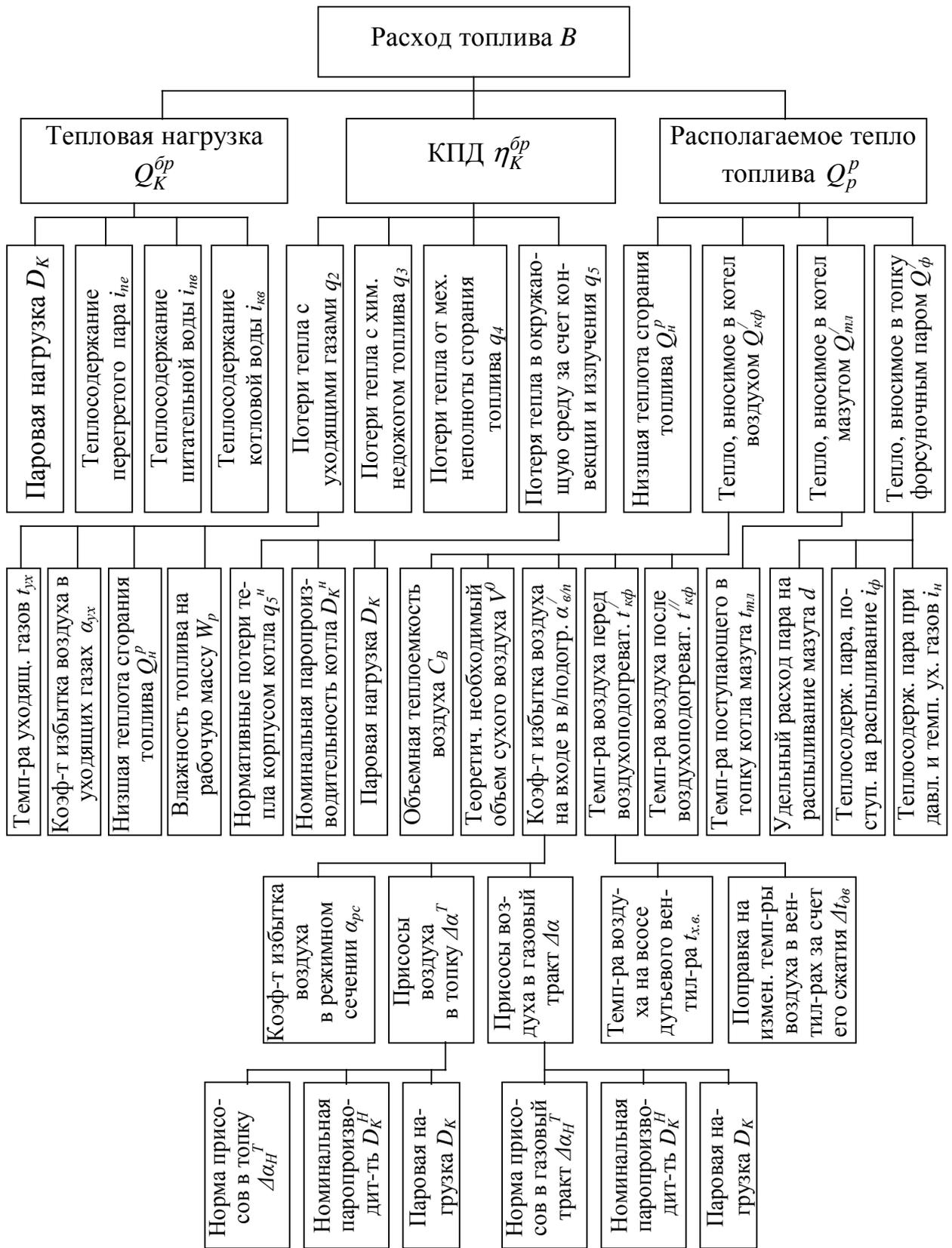


Рис. 4.8. Структура модели для расчета расхода топлива

4.4. Математическая модель функционирования энергоагрегатов

Построим базовую математическую модель функционирования энергоагрегатов, которую используем для моделирования и оптимизации задач энергетики. Модель построим на основе типовых методик расчета энергетических характеристик котлоагрегатов [48, 81,82].

Целевую функцию расхода топлива сформулируем в виде:

$$B = \frac{Q_K^{\text{бп}} \cdot 10^5}{Q_p^p \cdot \eta_K^{\text{бп}}} \quad (4.40)$$

где B - количество потребляемого топлива (т.н.т./час), необходимого для обеспечения тепловой нагрузки $Q_K^{\text{бп}}$ Гкал/час; Q_p^p - располагаемое тепло, ккал/кг; $\eta_K^{\text{бп}}$ - КПД котла брутто, %.

Тепловая нагрузка $Q_K^{\text{бп}}$ является заданной, плановой величиной.

Располагаемое тепло Q_p^p , входящая в целевую функцию (4.40), определяется соотношением:

$$Q_p^p = Q_n^p + Q'_{\text{кф}} + Q'_{\text{мл}} + Q'_{\text{ф}}, \quad (4.41)$$

где Q_n^p - низшая теплота сгорания топлива, ккал/кг; $Q'_{\text{кф}}$ - тепло, вносимое в котел воздухом, ккал/кг; $Q'_{\text{мл}}$ — тепло, вносимое в котел мазутом, ккал/кг; $Q'_{\text{ф}}$ — тепло, внесенное в топку форсуночным паром, ккал/кг.

Величина $Q'_{\text{кф}}$ в (4.41) вычисляется по формуле:

$$Q'_{\text{кф}} = C_B \cdot V^0 \cdot \alpha'_{\text{в/н}} \cdot (t''_{\text{кф}} - t'_{\text{кф}}), \quad (4.42)$$

где C_B - объемная теплоемкость воздуха - $C_B = 0.317$ ккал/(м³·°С); V^0 - теоретический объем сухого воздуха, необходимый для полного сгорания топлива - $V^0 = 10.42$ н.м³/кг; $\alpha'_{\text{в/н}}$ -

коэффициент избытка воздуха на входе в воздухоподогреватель; $t_{кф}''$ — температура воздуха после воздухоподогревателей (калориферов); $t_{кф}'$ — температура перед калориферами.

Коэффициент избытка воздуха на входе в воздухоподогреватель рассчитывался по соотношению:

$$\alpha'_{в/n} = \alpha_{pc} - \Delta\alpha^T + 0.85 \Delta\alpha,$$

где α_{pc} - коэффициент избытка воздуха в режимном сечении, определяемый по данным режимно-наладочных испытаний; $\Delta\alpha^T$ - нормативное значение присосов воздуха в топку; $\Delta\alpha$ — нормативная величина присосов воздуха в газовый тракт.

Нормативное значение присосов воздуха в топку определяется по следующей формуле:

$$\Delta\alpha^T = \Delta\alpha_H^T \cdot \frac{D_K^H}{D_K},$$

где $\Delta\alpha_H^T$ - норма присосов в топку, определяемая в процентах от теоретически необходимого количества воздуха для номинальной нагрузки котлов - $\Delta\alpha_H^T = 0.05$ (согласно [108, §4.31]); D_K^H - номинальная паропроизводительность данного котла, тонн/час; D_K - паровая нагрузка.

Нормативное значение присосов воздуха в газовый тракт $\Delta\alpha$ определяется по следующей формуле:

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_H \sqrt{\frac{D_K^H}{D_K}},$$

где $\Delta\alpha_H$ - норма присосов в газовый тракт, которая определяется в процентах от теоретически необходимого количества воздуха для номинальной нагрузки котлов. Для котлов с паропроизводительностью до 210 тонн/час (БКЗ-210-140ф) $\Delta\alpha_H = 0.1$, а для котлов с паропроизводительностью до 420 тонн/час (ТГМ-84Б) $\Delta\alpha_H = 0.25$ [234, §4.31].

Температура воздуха после воздухоподогревателей (калориферов) - $t_{кф}''$, входящая в (4.42), определяется по данным режимно-наладочных испытаний.

Температура воздуха перед калориферами - $t_{кф}'$ °С, определяющая $Q_{кф}'$ (4.42) рассчитывается из соотношения

$$t'_{кф} = t_{х.в.} + \Delta t_{\delta в},$$

где $t_{х.в.}$ - температура холодного воздуха на всосе дутьевого вентилятора, °С; $\Delta t_{\delta в}$ - поправка на изменение температуры воздуха в дутьевых вентиляторах за счет его сжатия, °С, определяемая по результатам испытаний.

Совокупность записанных соотношений для $\alpha'_{в/п}$, $\Delta \alpha^T$, $\Delta \alpha$, $t'_{кф}$ определяет количество тепла, вносимого в котел воздухом $Q'_{кф}$ (4.42). При работе на газе $Q'_{кф}$ незначительно и принимается равным нулю.

Тепло, вносимое в котел мазутом - $Q'_{мл}$, ккал/кг, входящее в (4.41), определяется зависимостью

$$Q'_{мл} = C_{мл} \cdot t_{мл} = (0.415 + 0.0006 \cdot t_{мл}) \cdot t_{мл},$$

где $C_{мл}$ - удельная теплоемкость мазута при температуре его поступления в топку, ккал/(кг·°С); $t_{мл}$ - температура поступающего в топку котла мазута, нагретого вне его, °С;

Тепло $Q'_{ф}$, внесенное в топку форсуночным паром являющееся последним слагаемым в (4.41), определяется для котлов с паромеханическими форсунками (ТГМ-84Б), работающими на мазуте по формуле

$$Q'_{ф} = d \cdot (i_{ф} - i_{н}),$$

где d - удельный расход пара на распыливание 1 кг мазута, кг пара / кг мазута. $d = 0.02$ (кг пара / кг мазута); $i_{ф}$ - энтальпия пара, поступающего на распыливание мазута, ккал/кг. $i_{ф} = 699.1$ (ккал/кг); $i_{н}$ - энтальпия пара при давлении и температуре уходящих газов, ккал/кг. $i_{н} = 600$ (ккал/кг).

Расчет нормативного КПД брутто $\eta_K^{бр}$, определяющего целевую функцию (4.40), производился по следующему соотношению:

$$\eta_K^{бр} = 100 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5, \quad (4.43)$$

где q_2 - потери тепла с уходящими газами, %; q_3 - потери тепла с химическим недожогом топлива, %, определяемые по результатам режимно-наладочных испытаний; q_4 - потери тепла от механической неполноты сгорания топлива, % (для котлов, сжигающих газ и мазут, потери тепла от механической неполноты сгорания топлива принимаются равными нулю); q_5 - потеря тепла в окружающую среду за счет конвекции и излучения наружными поверхностями, %.

Составляющая q_2 определяется зависимостью:

$$q_2 = (K \cdot \alpha_{yx} + C) \cdot (t_{yx} - \frac{\alpha_{yx}}{\alpha_{yx} + b} \cdot t_{yx}) \cdot A_t \cdot K_Q \cdot 10^{-2}, \quad (4.44)$$

где K, C, b, A_t - коэффициенты, зависящие от сорта и приведенной влажности топлива; α_{yx} - коэффициент избытка воздуха в уходящих газах; t_{yx} - температура уходящих газов; K_Q - поправочный коэффициент, учитывающий внесенное в топку котла тепло с паром, подогретым воздухом и топливом. Коэффициенты K, C, b определяются либо аналитически, либо эмпирически экспериментальным путем.

Для мазута справедливы следующие соотношения:

$$K = 3.494 + 0.02 \cdot \frac{W_p}{Q_H^p} \cdot 10^3; \quad C = 0.437 + 0.04 \cdot \frac{W_p}{Q_H^p} \cdot 10^3; \quad b = 0.13.$$

где W_p - влажность топлива на рабочую массу, %.

Для газа имеем: $K = 3.53$; $C = 0.6$; $b = 0.18$;

Коэффициент A_t находится из зависимости:

$$A_t = 1 + (t_{yx} - 150) \cdot 13 \cdot 10^{-5}$$

Величина α_{yx} - коэффициент избытка воздуха в уходящих газах – определяется по соотношению

$$\alpha_{yx} = \alpha_{pc} + \Delta\alpha;$$

Температура t_{yx} уходящих газов определяется по результатам режимно-наладочных испытаний.

Поправочный коэффициент K_Q учитывает внесенное в топку котла тепло с паром, подогретым воздухом и топливом:

$$K_Q = \frac{Q_H^p}{Q_p^p}.$$

Величина q_5 определяется соотношением:

$$q_5 = q_5^H \cdot \frac{D_K^H}{D_K}, \quad (4.45)$$

где q_5^H - нормативные потери тепла котлом (корпусом котла) в окружающую среду при номинальной часовой паропроизводительности, определяемые по расчету завода-изготовителя или по данным [134]. В нашем случае $q_5^H = 0.52$.

Полученная система выражений (4.40)-(4.45) представляет собой базовую математическую модель теплоэнергетических процессов при совместной работе теплоэнергетических агрегатов.

Отметим, что важной проблемой при моделировании работы энергоагрегатов является относительно быстрое изменение их состояний и характеристик в процессе эксплуатации. В то же время испытания, в процессе которых определяются требуемые величины, являются трудоемкими и дорогостоящими. Решение этой проблемы осуществляется в два этапа. Периодически, относительно редко проводятся испытания, в которых определяются базовые характеристики: изменение теплосодержания котловой воды ($i_{кв}$, ккал/кг (кДж/кг)), температуры воздуха после воздухоподогревателей ($t_{кф}''$, °C), температуры уходящих газов (t_{yx} , °C) и коэффициента избытка воздуха в режимном сечении (α_{pc}) в зависимости от изменений паропроизводительностей котлоагрегатов. Данные зависимости принимаются в качестве нормативных, и они являются базовыми при построении модели. В последней они представлены в виде регрессионных полиномов 3-ей степени типа (4.29), полученных в результате статистической обработки данных испытаний.

Далее в процессе эксплуатации указанные параметры измеряются при текущей нагрузке, определяется их отклонение от нормативных величин и, исходя из этого, делается поправка их значений во всем диапазоне рабочих нагрузок. При эксплуатации также измеряются и другие указанные выше характеристики. Это дает возможность путем периодической корректировки модели добиваться максимально возможного ее соответствия реальному объекту (энергоагрегату), что и было реализовано в разработанной модели.

§ 4.5. Оптимизация совместной работы энергоагрегатов в условиях неопределенности

Важной проблемой при практической реализации описанной методики оптимизации является выбор оптимального состава энергоагрегатов. Необходимо учитывать, что реальный диапазон рабочей паропроизводительности агрегатов, в отличие от описанного соотношением (4.34), может иметь разрывы, а паропроизводительности некоторых котлов, в зависимости от заданной суммарной паровой нагрузки теплоисточника, могут быть равными нулю ($D_{Ki} = 0$). Последнее означает, что возможны ситуации, когда для улучшения целевой функции из n работоспособных в данный момент котлов целесообразно остановить один (или несколько) из них.

Для решения этой проблемы, исходная задача разбивается на подзадачи, в каждой из которых методом перебора всех возможных вариантов задается определенная комбинация работающих и неработающих котлов. Всего таких комбинаций 2^n . Затем проверяется, может ли данный вариант обеспечить выполнение заданной суммарной паропроизводительности:

$$\sum_{i=1}^m D_{Ki}^{min} \leq D_K \leq \sum_{i=1}^m D_{Ki}^{max}, \quad (4.46)$$

где m – количество работающих котлов в данной комбинации.

При выполнении условия (4.46) осуществляется процесс оптимизации режимов работы энергоагрегатов, состоящий в максимизации КПД котельной установки (4.36), минимизации расхода условного топлива (4.37) либо минимизации финансовых затрат на обеспечение заданной паровой нагрузки (4.38) при ограничениях (4.33)-(4.35) с использованием метода случайного поиска «прямые выборочные процедуры с уменьшением интервала поиска» (описан в п.п. 4.1).

В соответствии с изложенным, процедура оптимизации разбивается на два этапа, каждый из которых схематически представлен на рис. 4.9 и рис. 4.10.

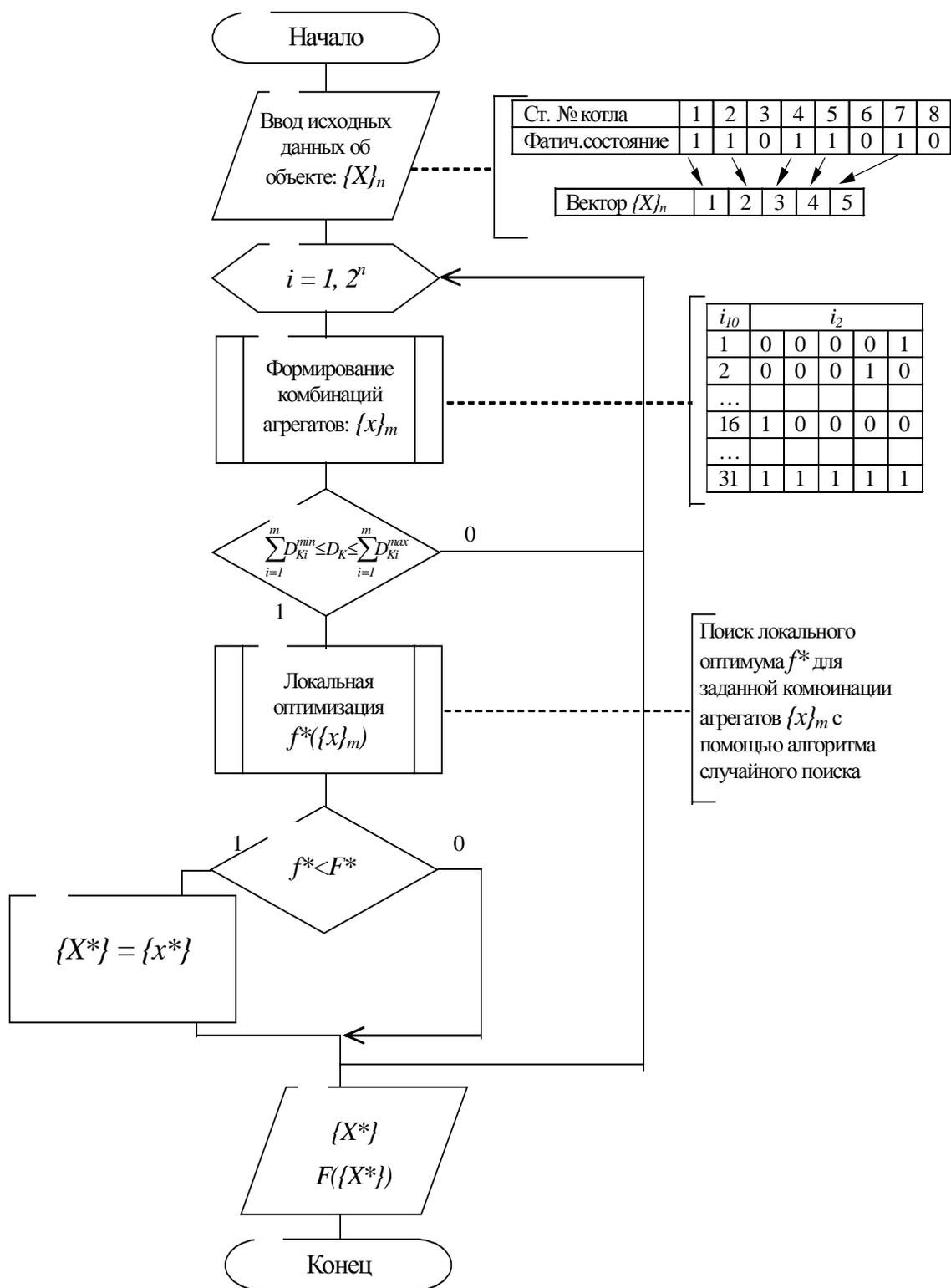


Рис. 4.9. Поиск оптимальной комбинации работающих агрегатов

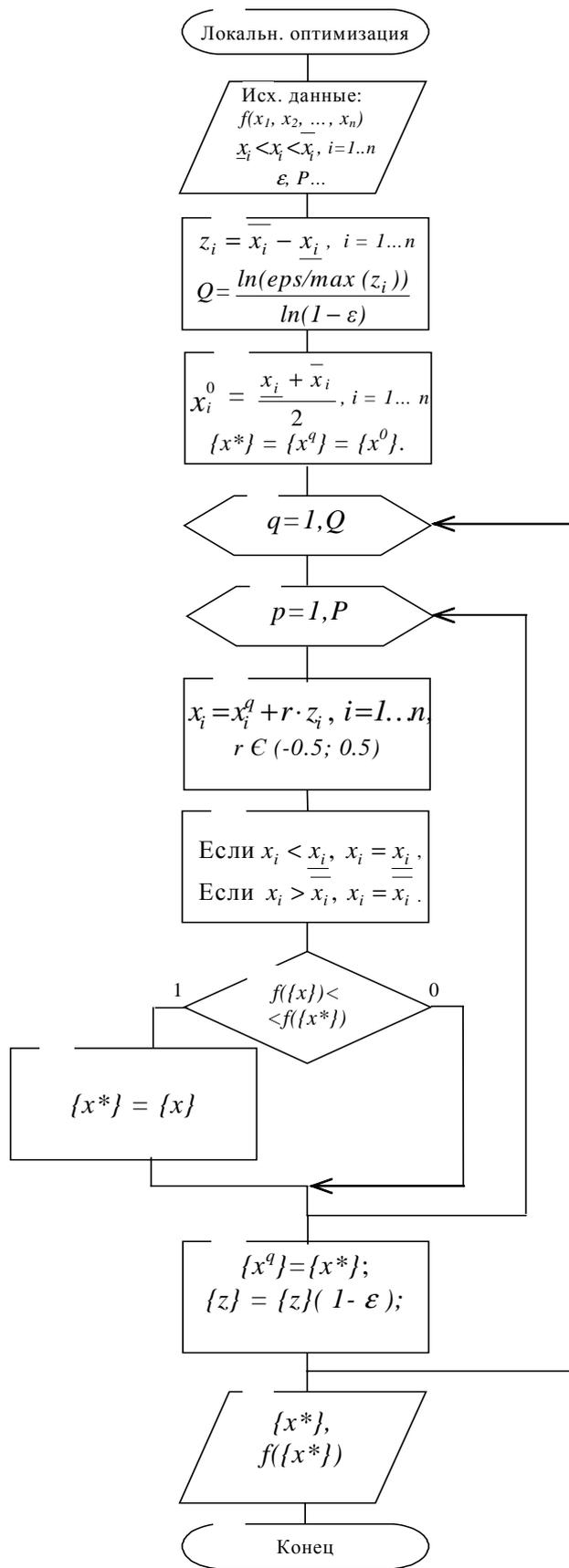


Рис 4.10. Алгоритм локальной оптимизации

Учет неопределенности при решении задачи оптимизации осуществляется на основе ее нечетко-интервального расширения. В соответствии с этим исходные данные представлялись нечеткими интервалами в трапецидальном виде (в четырехреперной форме).

Математические модели, описывающие работу энергоагрегатов, строились на основе регрессионных зависимостей. Их параметры в силу неопределенности исходных данных и статистического характера используемых при их оценивании методов также полагались интервалами. Опишем методику построения интервальных регрессионных полиномов.

Рассмотрим пример построения интервального регрессионного полинома 3-ей степени, описывающего зависимость температуры уходящих газов t_{yx} от паровой нагрузки D_K . В качестве исходных данных возьмем результаты режимно-наладочных испытаний одного из котлов, которые запишем в векторном виде:

$$\vec{D}_K = \{110, 130, 150, 170, 190, 210\};$$

$$\vec{t}_{yx} = \{172, 174, 176, 178, 180, 183\}.$$

Для удобства анализа предварительно произведем центрирование данных:

$$\vec{X} = \vec{D}_K^T - \overline{D_K} = \begin{pmatrix} 110 \\ 130 \\ 150 \\ 170 \\ 190 \\ 210 \end{pmatrix} - 160 = \begin{pmatrix} -50 \\ -30 \\ -10 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$$\vec{Y} = \vec{t}_{yx}^T - \overline{t_{yx}} = \begin{pmatrix} 172 \\ 174 \\ 176 \\ 178 \\ 180 \\ 183 \end{pmatrix} - 177.167 = \begin{pmatrix} -5.167 \\ -3.167 \\ -1.167 \\ 0.833 \\ 2.833 \\ 5.833 \end{pmatrix},$$

где $\overline{D_K} = 160$ и $\overline{t_{yx}} = 177.167$ – средние арифметические величины.

В соответствии с методом наименьших квадратов [100], для определения параметров β_j полинома третьей степени:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$$

построим и решим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \beta_0 n + \beta_1 \sum x_i + \beta_2 \sum x_i^2 + \beta_3 \sum x_i^3 = \sum y_i \\ \beta_0 \sum x_i + \beta_1 \sum x_i^2 + \beta_2 \sum x_i^3 + \beta_3 \sum x_i^4 = \sum x_i y_i \\ \beta_0 \sum x_i^2 + \beta_1 \sum x_i^3 + \beta_2 \sum x_i^4 + \beta_3 \sum x_i^5 = \sum x_i^2 y_i \\ \beta_0 \sum x_i^3 + \beta_1 \sum x_i^4 + \beta_2 \sum x_i^5 + \beta_3 \sum x_i^6 = \sum x_i^3 y_i \end{cases} \quad (4.47)$$

В дальнейшем будем использовать следующие матричные обозначения:

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- вектор наблюдений, где n – количество наблюдений.

Для рассматриваемого случая $n=6$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{pmatrix}$$

- регрессионная матрица размера $n \times k$,

где $k = 4$ – количество оцениваемых параметров;

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \text{ - вектор параметров.}$$

В этих обозначениях система (4.47) принимает вид:

$$(A^T A) \vec{\beta} = A^T \vec{Y}. \quad (4.48)$$

После вычисления коэффициентов матриц $A^T A$ и $A^T \vec{Y}$ в (4.48) для заданных исходных данных получим:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7000 & 0 \\ 0 & 7000 & 0 & 1414 \cdot 10^4 \\ 7000 & 0 & 1414 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 1414 \cdot 10^4 & 0 & 3271 \cdot 10^4 \end{pmatrix}, \quad A^T \vec{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 750 \\ 1333 \\ 1539 \cdot 10^3 \end{pmatrix}.$$

Решая систему (4.48) найдем параметры β_j :

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -0.2604 \\ 0.0955 \\ 2.23 \cdot 10^{-4} \\ 5.79 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

В итоге зависимость y от x принимает вид:

$$y = -0.2604 + 0.0955 \cdot x + 2.23 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 5.79 \cdot 10^{-6} \cdot x^3. \quad (4.49)$$

Переходя к исходным переменным t_{yx} и D_K , получим:

$$t_{yx} - 177.167 = -0.2604 + 0.0955 \cdot (D_K - 160) + 2.23 \cdot 10^{-4} \cdot (D_K - 160)^2 + 5.79 \cdot 10^{-6} \cdot (D_K - 160)^3,$$

откуда следует:

$$t_{yx} = 143.6 + 0.4685 \cdot D_K - 2.56 \cdot 10^{-3} \cdot D_K^2 + 5.79 \cdot 10^{-6} \cdot D_K^3. \quad (4.50)$$

Для получения регрессионного полинома в интервальном виде $[\underline{t}_{yx}, \overline{t}_{yx}]$ вычислим границы доверительных интервалов для всех параметров β_j по следующей формуле [100]:

$$\tilde{\beta}_j \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-k)} \cdot s_\varepsilon \sqrt{a_{jj}}, \quad j=0, 1, \dots, (k-1), \quad (4.51)$$

где $t_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-k)}$ - квантиль распределения Стьюдента при заданном уровне значимости α и значениях n и k ; s_ε - несмещенная оценка среднеквадратического отклонения ошибок наблюдений; a_{jj} - элемент матрицы $(A^T A)^{-1}$.

При построении интервала возможных значений уровень значимости обычно принимается равным $\alpha=0.05$.

Среднеквадратичная ошибка находится по формуле

$$s_{\varepsilon}^2 = \frac{Q_e}{n - k}, \quad (4.52)$$

где Q_e – остаточная сумма квадратов;

$$Q_e = \vec{Y}^T \vec{Y} - \vec{\beta}^T A^T \vec{Y}; \quad (4.53)$$

Вычислим остаточную сумму квадратов. Так как $\vec{Y}^T \vec{Y} = \sum y_i^2 = 80.83$, из (4.53) получаем:

$$Q_e = 80.83 - \begin{pmatrix} -0.2604 & 0.0955 & 2.23 \cdot 10^{-4} & 5.79 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 750 \\ 1333 \\ 1539 \cdot 10^3 \end{pmatrix} = 0.03968.$$

Оценка дисперсии и среднеквадратического отклонения ошибок определяются по формуле (4.52): $s_{\varepsilon}^2 = \frac{0.03968}{6 - 4} = 0.01984$; следовательно, $s_{\varepsilon} \approx 0.1409$. Матрица $(A^T A)^{-1}$ принимает вид:

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3945 & 0 & -1.953 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 1.127 \cdot 10^{-3} & 0 & -4.871 \cdot 10^{-7} \\ -1.953 \cdot 10^{-4} & 0 & 1.674 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0 & -4.871 \cdot 10^{-7} & 0 & 2.411 \cdot 10^{-10} \end{pmatrix}.$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента имеем $t_{0.975, (2)} = 4.303$.

В итоге по формуле (4.51) получим границы доверительных интервалов:

$$\text{для } \beta_0: -0.2604 \pm 4.303 \cdot 0.1409 \cdot \sqrt{0.3945};$$

$$\text{для } \beta_1: -0.0955 \pm 4.303 \cdot 0.1409 \cdot \sqrt{1.127 \cdot 10^{-3}};$$

$$\text{для } \beta_2: 2.23E-4 \pm 4.303 \cdot 0.1409 \cdot \sqrt{1.674 \cdot 10^{-7}};$$

$$\text{для } \beta_3: 5.79E-6 \pm 4.303 \cdot 0.1409 \cdot \sqrt{2.411 \cdot 10^{-10}};$$

или в интервальном виде:

$$\begin{aligned} [\underline{\beta}_0, \overline{\beta}_0] &= [-0.6411, 0.1203]; \\ [\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1] &= [0.0751, 0.1158]; \\ [\underline{\beta}_2, \overline{\beta}_2] &= [-2.478 \cdot 10^{-5}, 4.712 \cdot 10^{-4}]; \\ [\underline{\beta}_3, \overline{\beta}_3] &= [-3.625 \cdot 10^{-6}, 1.520 \cdot 10^{-5}], \end{aligned}$$

где $\underline{\beta}_j, \overline{\beta}_j, j=0, 1, 2, 3$ – левые и правые границы соответствующих коэффициентов.

В результате зависимость (4.49) в интервальной форме принимает вид:

$$\begin{aligned} [\underline{y}, \overline{y}] &= [-0.6411, 0.1203] + [0.0751, 0.1158] \cdot x + [-2.478 \cdot 10^{-5}, 4.712 \cdot 10^{-4}] \cdot x^2 + \\ &+ [-3.625 \cdot 10^{-6}, 1.520 \cdot 10^{-5}] \cdot x^3. \end{aligned}$$

Переходя к исходным переменным t_{yx} и D_K , получим:

$$\begin{aligned} [\underline{t}_{yx}, \overline{t}_{yx}] &= [176.526, 177.287] + [0.0751, 0.1158] \cdot (D_K - 160) + \\ &+ [-2.478 \cdot 10^{-5}, 4.712 \cdot 10^{-4}] \cdot (D_K - 160)^2 + [-3.625 \cdot 10^{-6}, 1.520 \cdot 10^{-5}] \cdot (D_K - 160)^3. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Необходимо отметить, что полученную интервальную регрессионную зависимость следует использовать в форме (4.54), не приводя его к виду четкого полинома типа (4.50). Это вызвано наиболее неприятным на практике свойством интервальной арифметики, заключающимся в сравнительно быстром росте ширины результирующего интервала по мере возрастания числа арифметических операций. Если выполнить преобразование полинома (4.54) к виду (4.50), то зависимость станет абсолютно бессодержательной из-за огромной ширины результирующего интервала. Графики зависимостей температуры уходящих газов от паровой нагрузки на всем рабочем диапазоне в четком (4.50) и интервальном (4.54) вариантах представлены на рис. 4.11.

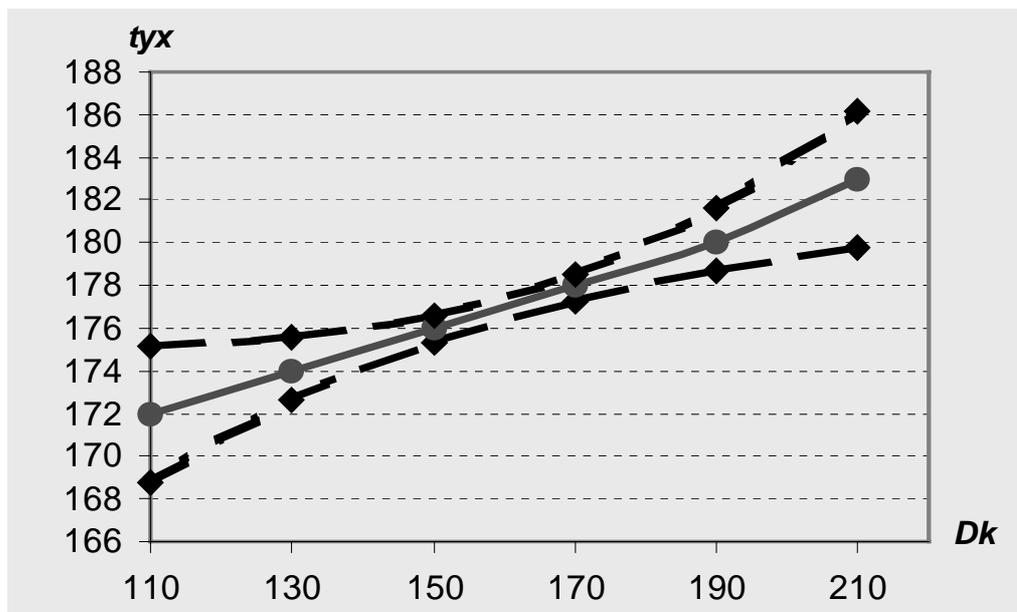


Рис. 4.11. Графики зависимостей температуры уходящих газов от паровой нагрузки:
 ●—● четкая форма зависимости (4.50) ◆—◆ нижняя и верхняя границы интервальной зависимости (4.54).

Для решения задач оптимизации с нечетко-интервальными целевыми функциями и ограничениями используемый метод оптимизации следует модифицировать применительно к интервальным и нечетко-интервальным данным. В табл. 4.6 представлен перечень нечетких параметров математической модели.

Таблица 4.6. Перечень нечетких параметров математической модели функционирования энергоагрегатов

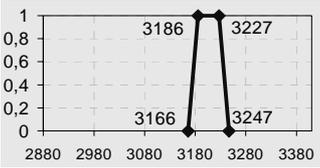
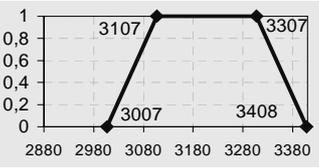
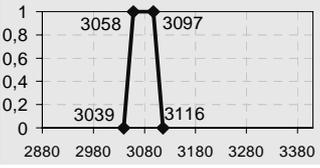
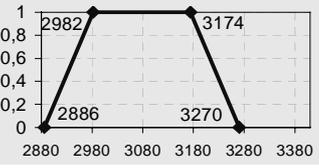
Наименование нечеткого параметра	Обозначение, ед. изм.	Способ формирования нечеткого интервала
1) Характеристики сжигаемого топлива:		
Низшая теплота сгорания	Q_n^p , ккал/кг или ккал/м ³	экспертным методом: $\pm\alpha_{верх} \%$, $\pm\alpha_{ниж} \%$
Влажность топлива на рабочую массу	W_p , %	То же
Температура мазута, подаваемого в топку котла	$t_{мл}$, °C	определяется погрешностью приборов: $\pm\alpha_{верх} \%$, $\pm\alpha_{ниж} \%$
2) Параметры, определяемые при тепловом расчете котельных агрегатов:		

Теплосодержание перегретого пара	i_{ne} , ккал/кг	определяется погрешностью приборов; задается четырьмя реперными точками
Теплосодержание питательной воды	i_{ne} , ккал/кг	То же
3) Нормативные параметры, определяемые при режимно-наладочных испытаниях энергоагрегатов:		
Теплосодержание котловой воды (представлено в виде регрессионных полиномов)	$i_{кв}$, ккал/кг	как доверительные интервалы для коэффициентов регрессионных полиномов
Температура воздуха после воздухоподогревателей (представлена в виде регрессионных полиномов)	$t_{кф}^{//}$, °C	То же
Температура уходящих газов (представлена в виде регрессионных полиномов)	$t_{ух}$, °C	-- // --
Коэффициент избытка воздуха в режимном сечении (представлен в виде регрессионных полиномов)	$\alpha_{рс}$	-- // --
Потери тепла с химическим недожогом топлива	q_3 , %	определяется погрешностью приборов: $\pm\alpha_{верх}$ %, $\pm\alpha_{ниж}$ %
4) Корректирующие параметры, замеряемые в процессе эксплуатации при текущем режиме работы:		
Теплосодержание котловой воды	$i_{кв}$, ккал/кг	определяется погрешностью приборов; задается четырьмя реперными точками
Температура воздуха после воздухоподогревателей	$t_{кф}^{//}$, °C	определяется погрешностью приборов: $\pm\alpha_{верх}$ %, $\pm\alpha_{ниж}$ %
Температура уходящих газов	$t_{ух}$, °C	То же
Коэффициент избытка воздуха в режимном сечении	$\alpha_{рс}$	-- // --

Потери тепла с химическим недожогом топлива	$q_3, \%$	-- // --
Присосы воздуха в газовый тракт	$\Delta\alpha$	-- // --
Присосы воздуха в топку	$\Delta\alpha^T$	-- // --
Температура холодного воздуха	$t_{х.в.}, ^\circ\text{C}$	-- // --

Рассмотрим пример решения типичной задачи оптимизации режимов параллельной работы двух парогенераторов по критерию минимума материальных затрат на используемое топливо без учета неопределенности и с учетом неопределенности. Исходные данные взяты соответствующими конкретным энергоагрегатам, установленным на могилевской ТЭЦ –2 (Республика Беларусь). Результаты решения задачи оптимизации представлены в табл. 4.7.

Таблица 4.7. Результаты оптимизации без учета ($\alpha_{\text{верх}} = 0, \alpha_{\text{ниж}} = 0$) и с учетом нечетко-интервальной неопределенности

	Суммарная паровая нагрузка $D_K = 550$ (тонн/час)		
	$\alpha_{\text{верх}} = 0,$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0$	$\alpha_{\text{верх}} = 0.005,$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0.01$	$\alpha_{\text{верх}} = 0.025,$ $\alpha_{\text{ниж}} = 0.05$
Стартовая точка задачи оптимизации $[f_{M31}^{\text{нач}}, f_{M32}^{\text{нач}}, f_{M33}^{\text{нач}}, f_{M34}^{\text{нач}}]$	3206		
Среднее значение $\overline{f_{M3}^{\text{нач}}}$	3206	3206	3207
Ширина интервала $\Delta f_{M3}^{\text{нач}}$	0	47	234
$D_{K1}^{\text{нач}}$	170	170	170
$\lambda_1^{\text{нач}}$	0	0	0
$\lambda_2^{\text{нач}}$	0	0	0
Оптимальное решение $[f_{M31}^{\text{опт}}, f_{M32}^{\text{опт}}, f_{M33}^{\text{опт}}, f_{M34}^{\text{опт}}]$	3077		
Среднее значение $\overline{f_{M3}^{\text{опт}}}$	3077	3077	3078
Ширина интервала $\Delta f_{M3}^{\text{опт}}$	0	45	224
$D_{K1}^{\text{опт}}$	210	210	210
$\lambda_1^{\text{опт}}$	1	1	1
$\lambda_2^{\text{опт}}$	1	1	1
Экономия, %	4.03	4.03	4.03

Из таблицы 4.7 следует, что без учета неопределенности для обеспечения требуемой паровой нагрузки 550т/ч оптимальные затраты на топливо должны составлять 3017 усл. ед.. При наличии неопределенности этой денежной суммы вернее всего не хватит для обеспечения нужной паровой нагрузки. Так, при интервальном характере данных (например

$\alpha_{\text{верх}}=0,025$, $\alpha_{\text{ниж}}=0,05$) необходимые затраты гарантированного выполнения требуемой нагрузки составляет 3270 усл. ед. При этом наиболее вероятно, что для обеспечения требуемой нагрузки достаточно суммы 3174 усл. ед. Таким образом, применение нечетких интервалов, в отличие от четких, позволяет находить не только необходимые значения искомой величины, которые для данного примера составляют [2886, 3270], но также определять наиболее вероятный интервал значений [2982, 3174].

Следует также отметить, что при отсутствии ограничений на используемое топливо, в отличие от рассмотренной выше задачи оптимизации совместной работы двух энергоагрегатов, средние значения как начальных, так и оптимальных решений для различных значений параметров $\alpha_{\text{верх}}/\alpha_{\text{ниж}}$, характеризующих степень неопределенности исходных данных, практически равны между собой.

Анализ решенной оптимизационной задачи позволил сделать вывод, что применение найденных оптимальных режимов работы агрегатов позволяет сэкономить более 4% (более точно в интервале значений - от 3 до 5%) используемых ресурсов. При этом в результате перераспределения рабочей нагрузки между группой работающих энергоагрегатов можно получить эффект в 1-2%; в результате перераспределения рабочей нагрузки и выбора оптимального состава энергоагрегатов – 2-3%; и при оптимизации с учетом соотношения цен на используемые виды топлива и их теплопроизводительности экономический эффект увеличивается до 4-5% используемых топливных ресурсов в денежном выражении.

Описанная методика математического моделирования и оптимизации режимов работы энергоагрегатов с учетом неопределенности параметров модели реализована в виде прикладного программного обеспечения (ППО «Энергетическая установка») на базе интегрированной среды визуального программирования Borland C++ Builder с применением аппарата объектно-ориентированного программирования.

Методика и реализующее ее ППО внедрены на котельных и ТЭЦ Могилевских тепловых сетей для расчета энергетических характеристик и оптимизации режимов работы группы параллельно работающих паровых котлоагрегатов. При некоторых модификациях разработанная система оптимизации может быть применена для разного уровня котельных и ТЭЦ и для других ситуаций совместной работы энергоустановок.

Г Л А В А V

ИНТЕРВАЛЬНАЯ И НЕЧЕТКО-ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА В ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

В настоящее время является очевидным, что создание любого искусственного объекта, будь то простейшие кремневые орудия каменного века или комплексы современных предприятий, предполагает предварительное разработку модели этого объекта [104, 88, 36]. Действительно, прежде чем что-то делать, требуется мысленно представить, как это что-то должно выглядеть. Наиболее конструктивной современной формой моделирования является математическое моделирование. Среди различных типов математических моделей широко распространенным классом являются имитационные (*Simulating*) модели. Коренным отличием их от других видов моделей является признание стохастичности, неопределенности процессов и явлений окружающего мира и ориентация на получение результатов, с учетом этих неопределенностей. При решении частных задач имитационные модели строятся и используются для выявления узких мест и оптимизации работы отдельных агрегатов, участков, цехов предприятий и пр. В настоящее время за рубежом практически ни один серьезный проект не проводится без предварительного построения имитационной модели, на которой проигрываются различные варианты реализации проекта с учетом возможных неопределенностей и обуславливаемых ими рисков. В экономике метод имитационного моделирования можно рассматривать как определяющий и наиболее эффективный подход к разработке обоснованных и оптимальных по совокупности критериев финансового, технологического, экологического и пр. характера бизнес-планов и инвестиционных проектов [148].

В базовом варианте имитационное моделирование сводится к прямой, непосредственной компьютерной имитации конкретных ситуаций, реализация которых возможна в условиях существующих неопределенностей, которые описываются в рамках классического теоретико-вероятностного подхода. После первых успехов, связанных с появлением достаточно производительных ЭВМ в 70-х годах, когда метод имитационного моделирования прочно утвердился в самых различных отраслях промышленности и экономики, наступило некоторое охлаждение в его оценках. Исследователями этого метода были выявлены некоторые внутренне присущие ему недостатки. Значительную роль в этом, наряду с другими обстоятельствами, сыграл выдвинутый Л. Заде [336] “принцип несовместимости”, в соответствии с которым по мере детализации модели в нее вносятся

все больше недостаточно определенных факторов, что неизбежно приводит к возрастанию неопределенности конечных результатов. В итоге, на определенном этапе усложнении модели, несмотря на кажущуюся высокую точность, обусловленную детализацией описания, модель оказывается практически бессодержательной.

Важно подчеркнуть, что в общепринятом смысле принцип несовместимости Л. Заде утверждает ограниченность возможностей математического моделирования как методологии познания действительности.

При этом следует отметить, что значительная потеря интереса к методу имитационного моделирования была, в первую очередь, обусловлена тем, что его наиболее общим требованием являлось детальное описание неопределенности в рамках классического теоретико-вероятностного подхода, недостатки которого уже тогда были осознаны в результате неудачных попыток моделирования сложных систем с участием человеческого фактора.

Сложившаяся сложная ситуация, вызванная необходимостью коррекции и дополнения существующих представлений о природе неопределенностей и способах их формализации, была в значительной степени разрешена после разработки Л. Заде теории нечетких множеств и теории возможностей, позволяющих оперировать с неопределенностями не только объективного характера, но и субъективными, обусловленными свойствами человеческого сознания.

В настоящей главе описывается подход к построению имитационных моделей, основанный на одной из составных частей теории нечетких множеств - нечетко-интервальной математике. Основными предпосылками к развитию этого подхода являются следующие ограничения и недостатки традиционного имитационного моделирования, основанного на методе статистических испытаний:

1. Низкая гибкость. Так как имитационная модель создается индивидуально для каждого процесса или объекта, то любые изменения в моделируемом объекте могут привести к пересмотру и значительным изменениям модели. В случае достаточно сложной модели это потребует значительных затрат времени и ресурсов.

2. В традиционных имитационных моделях используются генераторы случайных чисел, реализующие канонические законы распределения. Если распределение случайной величины не является каноническим или точно неизвестно, построение адекватной имитационной модели затруднительно.

3. Для получения достаточно точных результирующих частотных распределений необходимо проведение больших серий расчетов на модели, что связано со значительными временными затратами.

4. Метод статистических испытаний не позволяет удовлетворительно учитывать граничные значения случайных величин, вероятность реализации которых обычно незначительна.

5. Традиционные имитационные модели не могут быть непосредственно использованы при решении оптимизационных задач.

5.1. Методологические проблемы использования четких и нечетких интервалов (чисел) для представления неопределенных параметров моделей

Анализ проблем начнем с рассмотрения простого примера нечетко-интервального моделирования линейной производственной системы [296-298], состоящей из склада заготовок, трех станков и двух промежуточных складов для временного хранения обработанных полуфабрикатов (рис.5.1). Приняты следующие обозначения: x_i - количество изделий, поступающих на i -й станок; w_i - эффективные производительности станков (шт/час); x_{iz} - количество изделий, поступающих на i -й промежуточный склад.

Для простоты будем считать, что время ремонта оборудования и время транспортировки изделий между станками учтены в оценках эффективных производительностей станков.

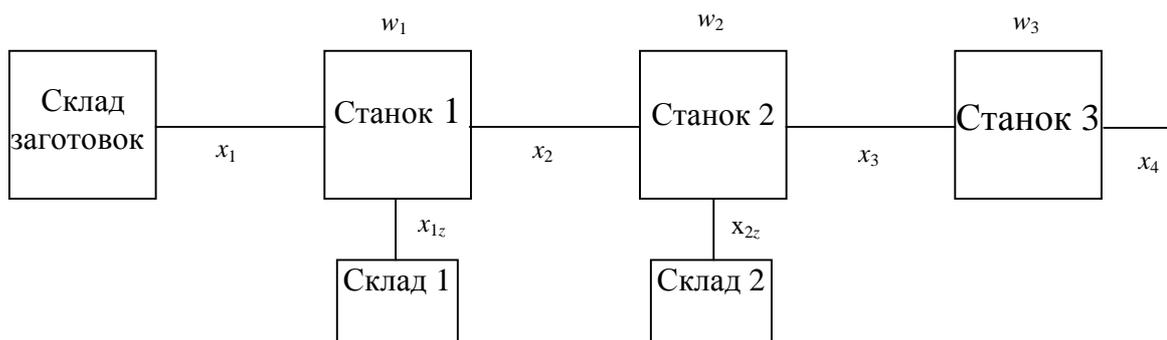


Рис.5.1. Линейная производственная система

В соответствии с общей методикой нечеткой симуляции [296-298], полагаем, что эффективные производительности w_i являются нечеткими интервалами (числами).

Тогда, если текущее время работы системы t является обычным числом, величины x_i и x_{iz} являются нечеткими интервалами.

Поскольку фактическая производительность каждого из станков зависит от производительности всех остальных единиц оборудования, детерминированная нечеткая модель рассматриваемой системы может быть представлена в виде:

$$x_1 = tw_1, \quad (5.1)$$

$$\text{if } (P(w_2 < w_1) > 0.5) \ x_{1z} = t(w_1 - w_2) \ \text{else } x_{1z} = 0; \quad (5.2)$$

$$\text{if } (P(w_2 < w_1) > 0.5) \ x_2 = tw_2 \ \text{else } x_2 = tw_1; \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} &\text{if } (P(w_1 < w_2) > 0.5), \\ &\text{if } (P(w_3 < w_1) > 0.5) \ x_{2z} = t(w_1 - w_3) \ \text{else } x_{2z} = 0; \\ &\text{else if } (P(w_3 < w_2) > 0.5) \ x_{2z} = t(w_2 - w_3) \ \text{else } x_{2z} = 0; \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} &\text{if } (P(w_1 < w_2) > 0.5); \\ &\text{if } (P(w_3 < w_1) > 0.5) \ x_3 = tw_3 \ \text{else } x_3 = tw_1; \\ &\text{else if } (P(w_3 < w_2) > 0.5) \ x_3 = tw_3 \ \text{else } x_3 = tw_2; \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$x_4 = x_3, \quad (5.6)$$

где $P(w_i < w_j)$ является вероятностью события $w_i < w_j$, методика расчета которой для случая сравнения нечетких интервалов описана в п.п. 1.5.

Отметим, что использование программного обеспечения, реализующего вероятностный подход к сравнению четких и нечетких интервалов, позволяет очень быстро строить модели типа (5.1)-(5.6), особенно, если использовать методы визуального программирования.

Для оценки эффективности предложенного подхода, результаты нечеткого моделирования сравнивались с результатами вероятностного моделирования, полученными на основе использования традиционного метода Монте-Карло. При вероятностном моделировании эффективные производительности w_i задавались как нормально распределенные случайные величины со следующими параметрами:

$$\bar{w}_1=0.04, \ \sigma_1=0.0024; \ \bar{w}_2=0.03, \ \sigma_2=0.0018; \ \bar{w}_3=0.05, \ \sigma_3=0.003,$$

где \bar{w}_i -математические ожидания; σ_i - стандартные отклонения.

Для получения статистически достоверных результатов моделирования, было проведено 1000 численных экспериментов для времени работы системы $t = 1000$.

Приведенные распределения вероятности для w_i использовались также для построения соответствующие нечетких интервалов, необходимых для нечеткого моделирования. Для преобразования распределений вероятности в нечеткие интервалы использовался метод, описанный в п.п. 2.1. В соответствии с этим методом, все α -уровни нечеткого интервала соответствуют доверительным интервалам распределения вероятностей.

Так, для нулевого α -уровня ($\alpha = 0$) принималось, что ширина интервала равна:

$$w_{i0} = [\bar{w}_i - dw_0, \bar{w}_i + dw_0], \text{ где } dw_0 = 3\sigma_i,$$

аналогично вычисляются интервалы для других α -уровней $\alpha \in (0,1]$

$$w_{i\alpha} = [\bar{w}_i - dw_\alpha, \bar{w}_i + dw_\alpha], \text{ где } dw_\alpha = \sigma_i \sqrt{-2 \ln(\alpha)}$$

Очевидно, что в этом подходе, нижний α уровень ($\alpha = 0$) полученного нечеткого интервала соответствует доверительному интервалу для вероятности 99.7 %.

Результаты нечеткого моделирования и симуляции на основе метода Монте- Карло представлены на рис. 5.2.

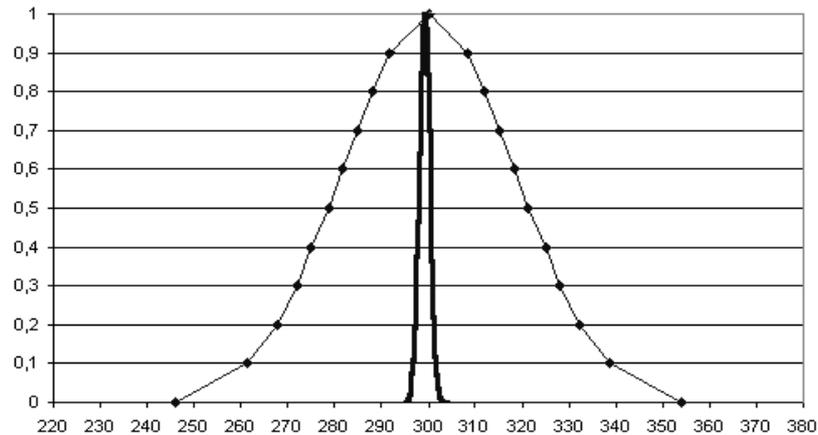


Рис.5.2. Распределение числа единиц готовой продукции x_4 для $t=1000$: — нечеткая модель, — моделирование на основе метода Монте-Карло

Легко заметить, что результаты нечеткого моделирования можно расценивать как пессимистические с точки зрения их неопределенности, что выражается в значительной ширине итоговых нечетких интервалов. С другой стороны, такие результаты можно рассматривать как своего рода гарантированные оценки, поскольку нечеткое моделирование обеспечивает учет всех, в том числе граничных значений исходных четких и нечетких интервалов, описывающих неопределенные параметры модели. Отметим, что получение таких гарантированных оценок с помощью традиционного подхода на основе метода Монте-Карло практически невозможно в силу вероятностного характера этого вида моделирования.

Проведенные исследования свидетельствуют, что с ростом числа единиц оборудования (станков), неопределенности результатов нечеткого и вероятностного имитационного моделирования постепенно сближаются, что подтверждает возможность практического использования разработанного метода.

Кроме того, возможность формального оперирования с нечеткими интервалами на этапе формализации модели как с обычными переменными, позволяет легко строить модели сколь угодно сложной разветвленной структуры. В конечном счете, это преимущество нечеткого моделирования вытекает из возможности прямой реализации арифметических операций на четких и нечетких интервалах. Вопросы программной реализации интервальной и нечетко интервальной арифметик легко разрешаются с использованием объектно-ориентированного программирования. При этом затраты машинного времени при нечетко-интервальном моделировании в десятки тысяч раз ниже, чем при использовании метода статических испытаний. Причем это преимущество проявляется наиболее явно при

моделировании сложных производственных систем с большим числом единиц оборудования.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

5.2. Моделирование и оптимизация обеспечения предприятия сырьевыми ресурсами из нескольких источников

Рассмотрим задачу имитационного моделирования и оптимизации процесса снабжения предприятия сырьем из нескольких источников [118, 119]. В качестве конкретного примера исследуем ситуацию снабжения асфальтового завода, когда сырье (галька) добывается в трех различных карьерах. Каждый карьер имеет одинаковую среднюю производительность добычи сырья (гальки), при этом они расположены на различных расстояниях от перерабатывающего сырье предприятия (асфальтобетонного завода) (рис.5.3). Имеется парк автомобилей, осуществляющих перевозку сырья.

Построим имитационную модель снабжения предприятия сырьем, и на ее основе решим задачу оптимизации перевозок. Число автомобилей будем считать внешним управляющим параметром.

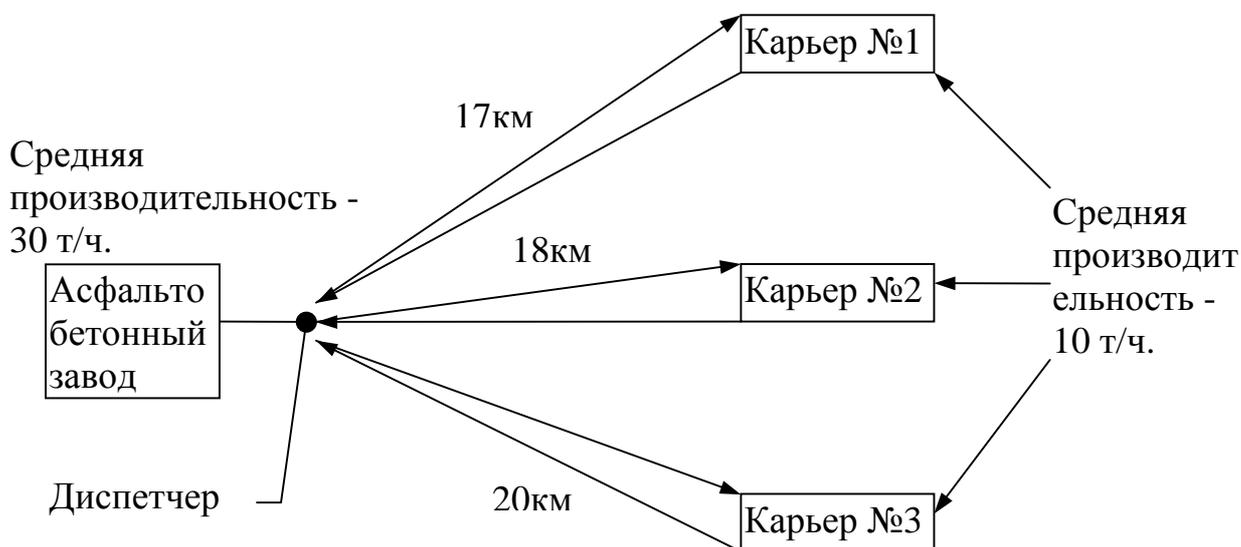


Рис. 5.3. Общая схема моделируемого предприятия

Базовыми входными переменными в данной производственно-логистической системе примем следующие факторы:

- время загрузки автомобиля;

- время разгрузки автомобиля;
- продолжительность мелкого ремонта, который осуществляется водителем в пути;
- производительность каждого из карьеров;
- скорость автомобиля;
- количество используемых автомобилей.

В соответствии с реальными условиями транспортных перевозок все входные величины, за исключением числа используемых автомобилей (управляющий параметр), характеризуются неопределенностями. Их будем описывать соответствующими частотными распределениями, параметры которых примем в соответствии с нормативами дорожного строительства. Построенные таким образом частотные распределения входных величин приведены на рисунках 5.4 ÷ 5.8.

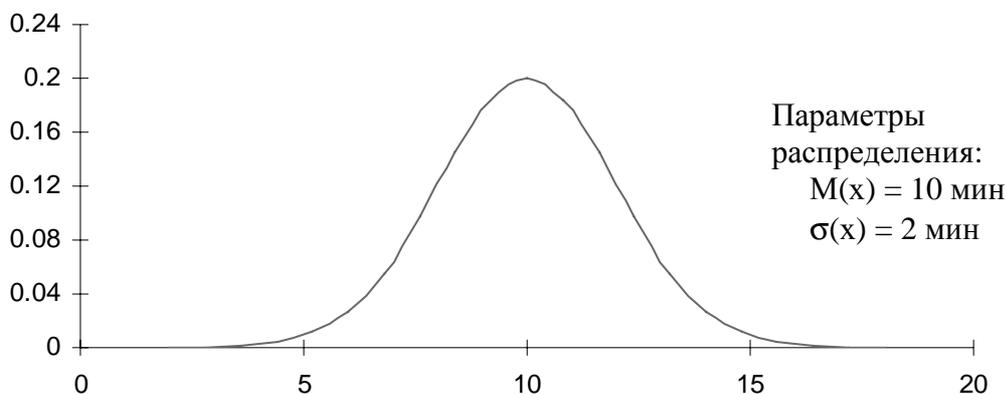


Рис. 5.4. Время погрузки автомобиля

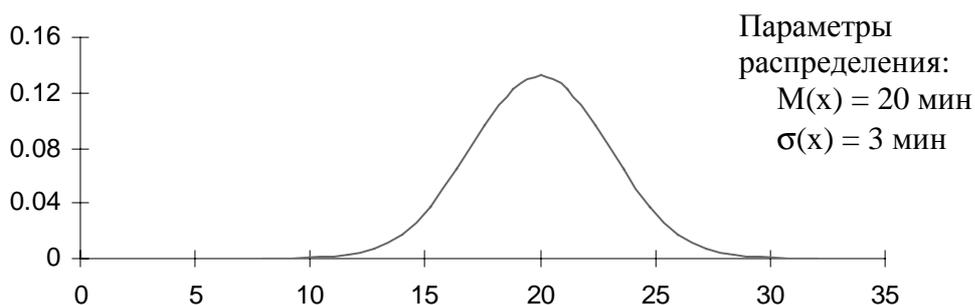


Рис. 5.5. Время разгрузки автомобиля

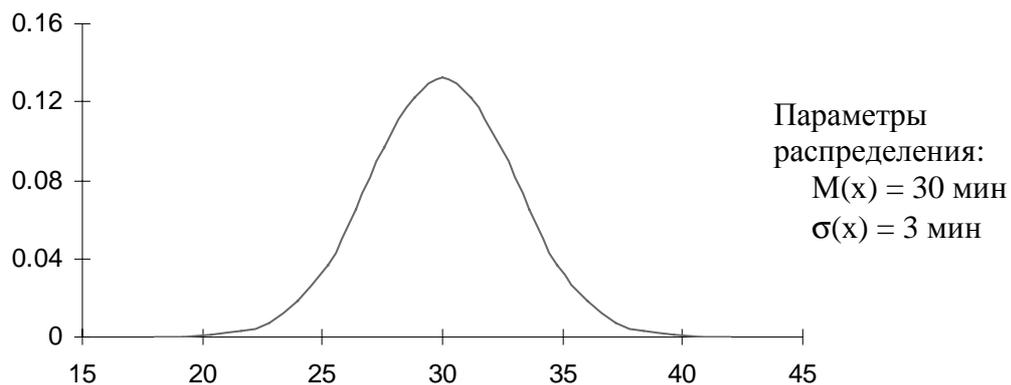


Рис.5.6. Продолжительность мелкого ремонта автомобиля

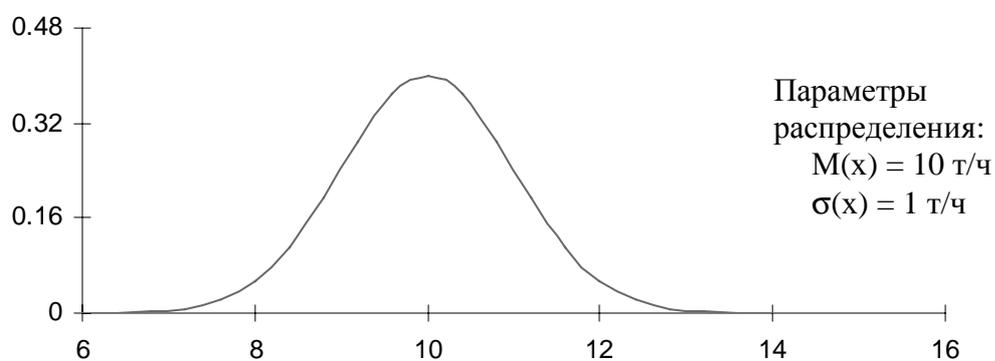


Рис. 5.7. Производительность каждого из карьеров.

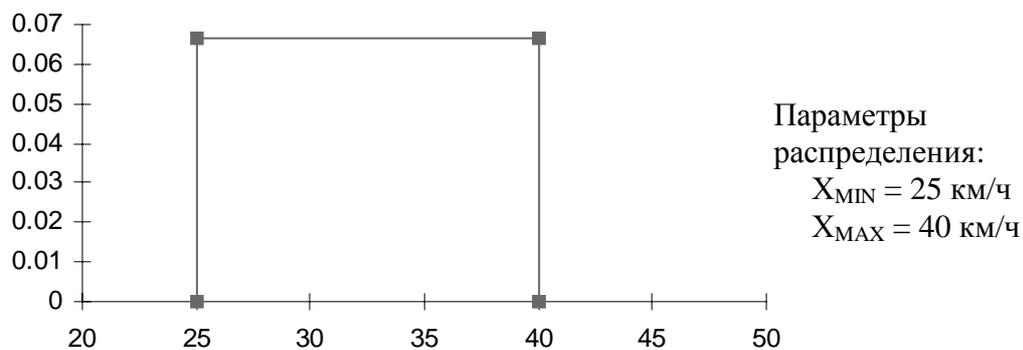


Рис. 5.8. Скорость автомобиля

Выходными характеристиками процесса, определяющими его эффективность являются :

- суммарное время простоя автомобилей на заводе из-за отсутствия сырья;
- общее время простоя асфальтобетонного завода из-за отсутствия гальки;

- общее время простоя автомобилей на погрузке;
- общее время простоя автомобилей при разгрузке;
- суммарная продолжительность мелкого ремонта;
- общая стоимость перевозок.

Имитационное моделирование процессов перевозок проводилось двумя способами: классическим, с использованием вероятностно статистических подходов и нечетко-интервальным.

При использовании традиционного подхода к имитационному моделированию принимали, что потребность асфальтобетонного завода в гальке равна суммарной производительности карьеров.

При разработке имитационной модели использовался метод пошагового моделирования, в соответствии с которым, рабочий день имитируемой производственной системы разделялся на шаги с дискретизацией в 1 минуту и отслеживались случайные события, произошедшие за текущий временной шаг. В соответствии с классификацией, предложенной в работе [1], использованная методика соответствует так называемому «событийному» подходу.

При реализации имитационной модели значения входных случайных переменных были получены при помощи генераторов случайных чисел, работающих по соответствующим законам распределения.

В имитационном моделировании важной характеристикой, влияющей на точность полученных данных, является количество реализации имитационной модели. Исследования показали, что в рассматриваемом случае устойчивые частотные распределения выходных параметров модели гарантируются при числе ее реализации около 1000.

Поэтому для сопоставления результатов, полученных с использованием традиционного подхода к имитационному моделированию, основанного на методе статистических испытаний, и нечетко-интервального подхода, было проведено 1000 прогонов модели для случая девяти задействованных автомобилей. В итоге получены необходимые для сравнительного анализа частотные распределения выходных переменных модели.

Для реализации нечетко-интервального подхода была разработана балансовая модель системы, которая на первом этапе полагается не стохастической, а по внешней форме четко детерминированной. На втором этапе производилось нечетко-интервальное расширение (см. глава I) полученных аналитических выражений.

Опишем балансовую модель в детерминированной форме.

Продолжительность одного полного рейса автомобиля (включая время на загрузку и разгрузку автомобиля) (мин) описывалась зависимостью:

$$t_i = 2 \cdot 60 \frac{S_i}{v} + t_{\Pi} + t_{PA3}, \quad (5.7)$$

где t_{Π} - время загрузки, мин; t_{PA3} - время разгрузки, мин; v - скорость автомобиля при перевозке км/ч; i - номер карьера, в который совершается рейс; S_i - расстояния от завода до i -го карьера, км. Множитель 60 соответствует переводу единиц измерения (скорости автомобиля из км/час в км/мин).

Количество рейсов, совершаемых за рабочий день в каждый из карьеров, ед., определялась формулой:

$$n_i = \frac{(t_{PD} - t_i) a_i}{60c}, \quad (5.8)$$

где t_{PD} - продолжительность рабочего дня за вычетом времени обеденного перерыва, мин; c - грузоподъемность одного грузовика, т; a_i - производительность соответствующего карьера, т/ч.

Выражение $(t_{PD} - t_i)$ в (5.8) формализует выполнение следующего условия: если водитель не успевает до конца рабочего дня совершить рейс (конец рабочего дня застанет его в пути), то для этого водителя рабочий день считается законченным и его автомобиль направляется в гараж.

Время от начала рабочего дня до разгрузки первого автомобиля на заводе характеризовалось выражением (мин):

$$t_{ПЕРВ} = 60 \frac{\min(S_1, S_2, S_3)}{v} + t_{\Pi} + 60 \frac{c}{a_{\min(S_1, S_2, S_3)}}, \quad (5.9)$$

где $a_{\min(S_1, S_2, S_3)}$ - производительность ближайшего к заводу карьера.

Множитель 60 также, как и ранее осуществляет перевод единиц измерения (в первом случае скорость автомобиля из км/час в км/мин, а во втором - производительность карьера из

часов в минуты). Слагаемое $60 \frac{\min(S_1, S_2, S_3)}{v}$ представляет собой время переезда от ближайшего карьера до завода, величина $60 \frac{c}{a_{\min(S_1, S_2, S_3)}}$ - является временем, необходимым для выработки гальки в количестве, достаточном для загрузки одного автомобиля.

Время простоя на заводе в течение рабочего дня из-за отсутствия сырья описывалось зависимостью (мин):

$$t_{\text{ПР}} = t_{\text{РД}} - t_{\text{ПЕРВ}} - t_{\text{РАЗ}} \sum_{i=1}^3 n_i, \quad (5.10)$$

где $t_{\text{ПЕРВ}}$ - время от начала рабочего дня до разгрузки первого автомобиля на заводе, мин.

Стоимость перевозок, совершенных за весь рабочий день, тыс. руб., рассчитывалась по формуле:

$$st = 2st_0 \sum_{i=1}^3 n_i S_i, \quad (5.11)$$

где st_0 - стоимость перевозки одной тонны груза на расстояние в один километр, тыс. руб./т·км.

Общая продолжительность мелкого ремонта в течение рабочего дня, мин., определялась выражением:

$$r = r_0 \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{v} n_i, \quad (5.12)$$

где r_0 - нормативный коэффициент ремонта, минут ремонта/часов работы автомобиля.

Общее время простоя автомобилей на погрузке и в очереди на погрузку, мин., характеризовалось соотношением:

$$t_{\text{П}}^* = \sum_{i=1}^3 \left(60 \frac{3c}{a_i} - t_i \right) (n_i - n_{i0}) + \sum_{i=1}^3 \left(60 \frac{c}{a_i} \cdot \sum_{i=1}^{n_{i0}} i \right), \quad (5.13)$$

где n_{i0} - количество автомобилей, находящееся на соответствующем карьере в начале рабочего дня, штук.

Слагаемое $\sum_{i=1}^3 \left(60 \frac{c}{a_i} \cdot \sum_{i=1}^{n_{0i}} i \right)$ представляет собой время простоя на погрузке, связанное с начальным количеством автомобилей в карьере; сумма $\sum_{i=1}^3 \left(60 \frac{3c}{a_i} - t_i \right) (n_i - n_{i0})$ характеризует время простоя в установившемся режиме работы (после того как каждый из автомобилей уже совершил по одному рейсу на завод).

Общее время простоя автомобилей на разгрузке и в очереди на разгрузку, мин., рассчитывалось по зависимости:

$$t_{PA3}^* = \max(n_1, n_2, n_3) \left(3t_{PA3} - \frac{60}{\vartheta} \left(3 \max(S_1, S_2, S_3) - \sum_{i=1}^3 S_i \right) \right), \quad (5.14)$$

В (5.14) слагаемое $3t_{PA3}$ представляет собой время простоя на разгрузке, при условии, что автомобили из трех карьеров приходят на завод одновременно, невязка $\frac{60}{\vartheta} \left(3 \max(S_1, S_2, S_3) - \sum_{i=1}^3 S_i \right)$ - является поправочным коэффициентом, учитывающим неодновременность прихода автомобилей из разных карьеров на разгрузку.

В соответствии с изложенными ранее общими принципами нечеткого расширения входные неопределенные переменные заменялись нечеткими интервалами, полученными из соответствующих частотных распределений с использованием методики, описанной в п.п. 2.1 и п.п. § 5.1. Такой подход непосредственного нечеткого расширения исходной детерминированной задачи отличается от методики нечетко-интервального моделирования, представленной в п.п. 2.1, и демонстрирует гибкие возможности метода нечетко-интервального моделирования.

На рис. 5.9 – 5.13 представлены частотные распределения значений выходных переменных, найденные на основе вероятностного подхода, и соответствующие нечеткие интервалы, полученные методом нечетко-интервального моделирования. В обоих случаях моделировалась работа предприятия в течение 1000 дней. Принималась, что перевозку осуществляют 9 автомобилей.

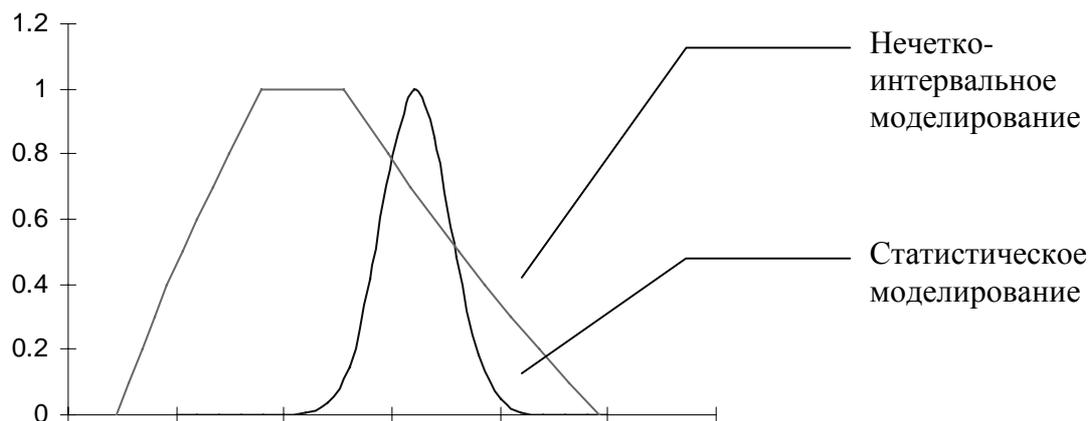


Рис. 5.9 Суммарная продолжительность мелкого ремонта за рабочий день, час

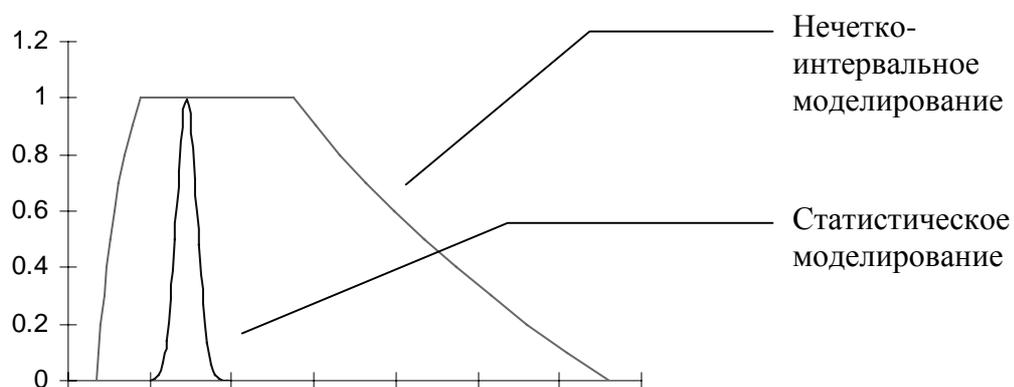


Рис. 5.10. Простой автомобилей в очереди на погрузку за рабочий день, час

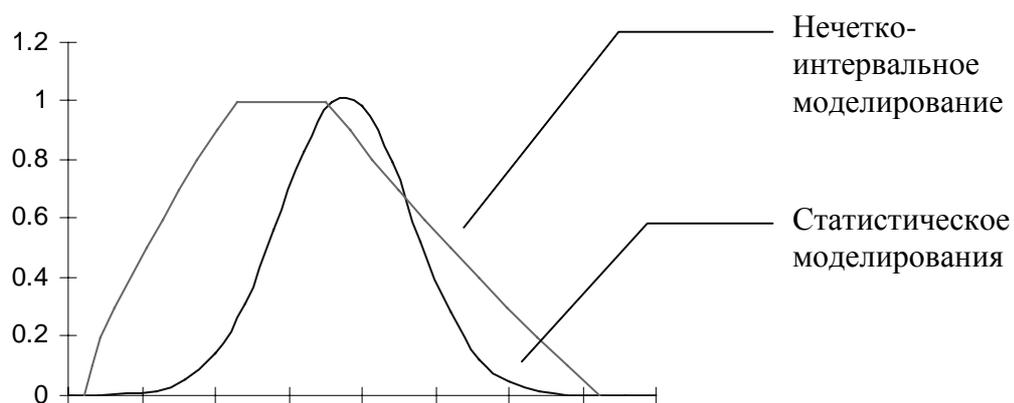


Рис. 5.11. Простой автомобилей в очереди на разгрузку за рабочий день, час

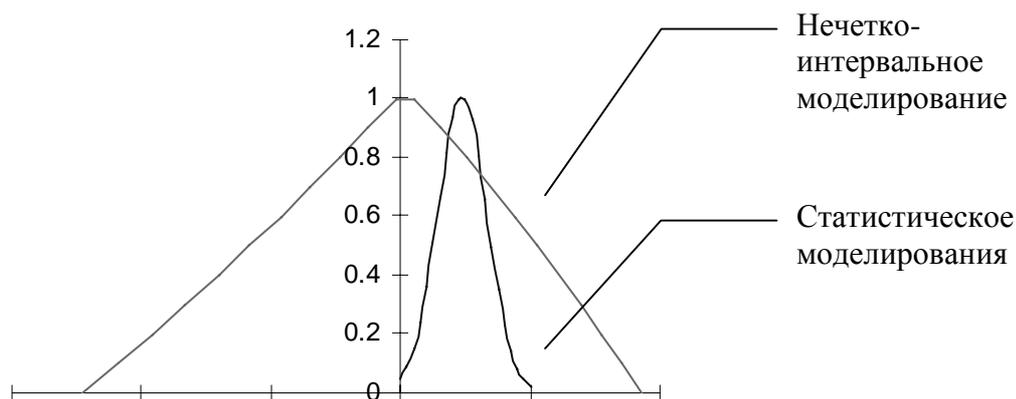


Рис. 5.12. Простой автомобилей на заводе из-за отсутствия сырья за рабочий день, час.

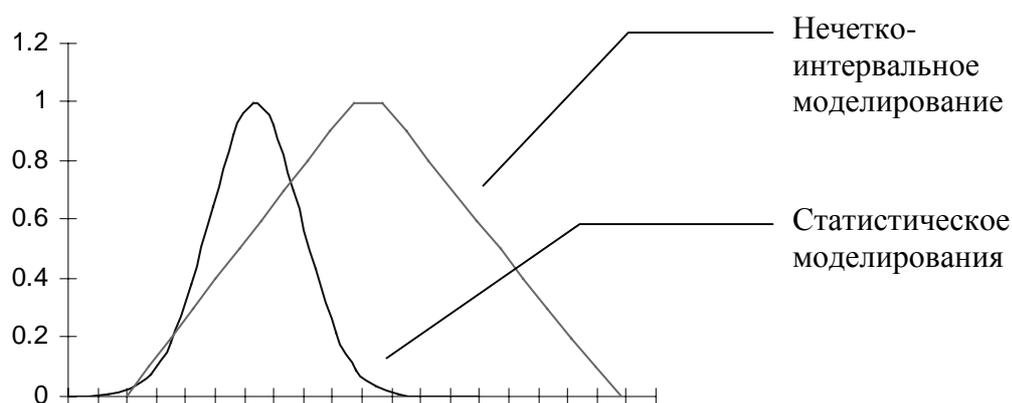


Рис. 5.13. Стоимость перевозок за рабочий день, тыс. руб.

Следует отметить, что результаты, полученные с использованием нечетко-интервальной модели и математические ожидания выходных данных, полученных при реализации имитационной модели с помощью метода статистических испытаний, достаточно близки, но не совпадают. Это связано с различными допущениями, принятыми при создании имитационной и нечетко-интервальной модели. В целом, неопределенность результатов нечетко-интервального моделирования выше, чем при использовании традиционного подхода. Однако, как уже было отмечено в п.п 2.1, нечетко-интервальный подход обеспечивает «гарантированные» результаты, во всей полноте учитывающие неопределенность исходных данных, что практически недостижимо при использовании традиционных методов имитации.

Рассмотрим проблему оптимизации транспортного обеспечения перевозок.

В нашем случае, требуется найти оптимальное для совокупности частных критериев качества число используемых автомобилей, которое в рассматриваемой задаче является единственной управляющей переменной.

Очевидно, в моделируемой системе к показателям качества относятся:

- общее время простоя асфальтобетонного завода из-за отсутствия гальки;
- общее время простоя автомобилей на погрузке;
- общее время простоя автомобилей при разгрузке;
- затраты на обслуживание автомобилей, определяемые количеством используемых автомобилей.

Для получения частных критериев на основании показателей качества необходимо выбрать метод, позволяющий унифицировать процесс построения критериев и строить их таким образом, чтобы количественно они выражались в единой шкале измерений. При этом целесообразно использовать такие методы, которые позволяли бы учитывать информацию качественного, субъективного характера, основанную на опыте и интуиции исследователей. Поэтому для формализации частных критериев использовались функции желательности (см. главу 2). Последние, в сущности, являются другой, более удобной в приложении к проблемам оптимизации, интерпретацией нечеткого интервала.

Для построения функции желательности использовалась следующая методика:

- путем проведения численных экспериментов с моделью системы определялись крайние возможные значения, принимаемые каждым из показателей качества;
- на основании полученных крайних значений показателей качества для каждого из них была получена функция желательности, общий вид которой представлен на рис. 5.14.

Наиболее желательному значению показателя качества соответствует максимальное значение функции желательности равное 1, наименее желательному - минимальное значение, равное 0.

Определение значения частного критерия сводится к вычислению значения функции желательности при заданном значении показателя качества.

Эта задача усложняется, если значение показателя качества представлено в нечетко-интервальной форме. Расчет значения частного критерия в этом случае сводится к решению задачи оптимизации при двух частных критериях - желательности (оптимальности), представленной функцией желательности, и реализуемости, представленной функцией принадлежности нечеткому интервалу $\mu(x)$ значения показателя качества. Методика решения этой задачи подробно описана ниже.

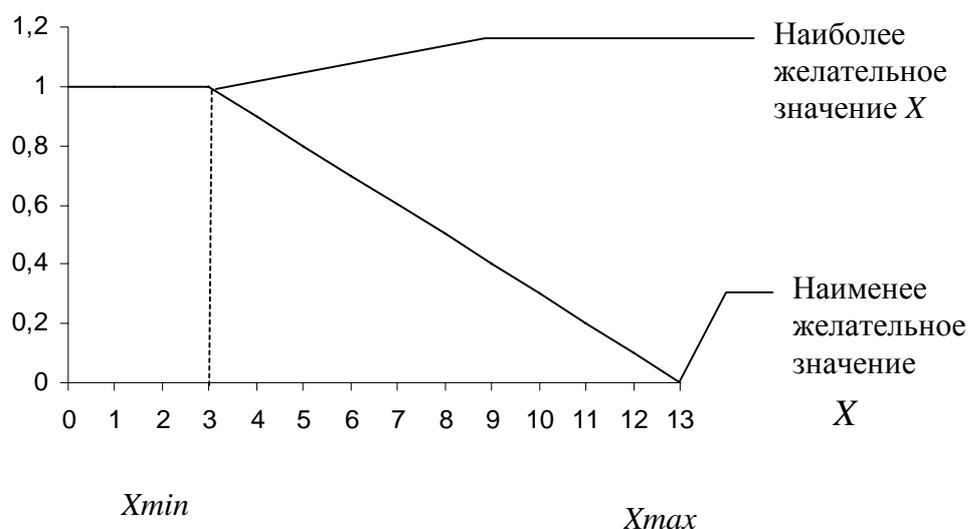


Рис. 5.14. Общий вид функции желательности

Построенные частные критерии неравноценны и вносят различный вклад в формирование глобального критерия. В рассматриваемой задаче ранги частных критериев определялись на основе экспертных парных лингвистических оценок. Эксперты попарно сравнивали значимости всех факторов и высказывали словесные оценки вида «критерий минимизации простоев автомобилей на заводе несколько предпочтительнее критерия минимизации простоя автомобилей при погрузке». В соответствии с методикой, описанной в п.п. 2.2.1, лингвистическим оценкам ставились в соответствие числа натурального ряда.

В результате была получена матрица парных сравнений, представленная в табл. 5.1. В таблице K_1 , K_2 , K_3 , K_4 – частные критерии минимизации простоев автомобилей на заводе, простоев автомобилей при погрузке, простоев автомобилей при разгрузке, затрат на обслуживание автомобилей, соответственно.

Таблица 5.1. Матрица парных сравнений частных критериев

	K_1	K_2	K_3	K_4
K_1	1	5	5	3
K_2	1/5	1	1/2	1/3
K_3	1/5	2	1	1/3
K_4	1/3	3	3	1

Для приведенной в таблице 5.1 матрицы парных сравнений на основе рассмотренного во второй главе подхода были получены следующие значения рангов частных критериев:

- критерий минимизации простоев на заводе - $\alpha_1=2.2696$;
- критерий минимизации простоев при погрузке - $\alpha_2=0.333$;
- критерий минимизации простоев при разгрузке - $\alpha_3=0.4757$;
- критерий минимизации затрат на обслуживание автомобилей - $\alpha_4=0.9217$.

Полученные значения рангов частных критериев далее использовались при расчете численных значений оптимизируемого глобального критерия. Численное решение задачи оптимизации отыскивалась двумя способами — на основе вероятностного подхода и нечетко-интервального моделирования.

При использовании вероятностного подхода отыскание оптимального решения задачи осуществлялась на основе зависимости величины глобального критерия о числа автомобилей.

Для получения этой зависимости на основе результатов имитационного моделирования традиционным методом статистических испытаний использовалась следующая процедура:

- путем проведения статистических испытаний на имитационной модели находились частотные распределения показателей качества для различных значений числа используемых автомобилей;
- на основе найденных частотных распределений определялись максимальные и минимальные значения, принимаемые каждым из показателей качества, при всех возможных значениях количества используемых автомобилей;
- на базе полученных граничных значений показателей качества для каждого из них строились соответствующие функции желательности;
- на основе математических ожиданий частотных распределений показателей качества и соответствующих функций желательности рассчитывались значения соответствующих частных критериев;
- на базе значений частных критериев рассчитывались значения глобального критерия в соответствии с выбранным способом его формирования;
- на основе значений глобального критерия, полученных для разного числа используемых автомобилей, находилось оптимальное значение глобального критерия (в рассматриваемой задаче - максимальное). Соответствующее этому значению количество используемых автомобилей принималось оптимальным для данного варианта глобального критерия.

Результаты решения задачи оптимизации при использовании имитационной модели на основе статистических испытаний (метод Монте-Карло) для различных способов формирования глобального критерия приведены на рис. 5.15.

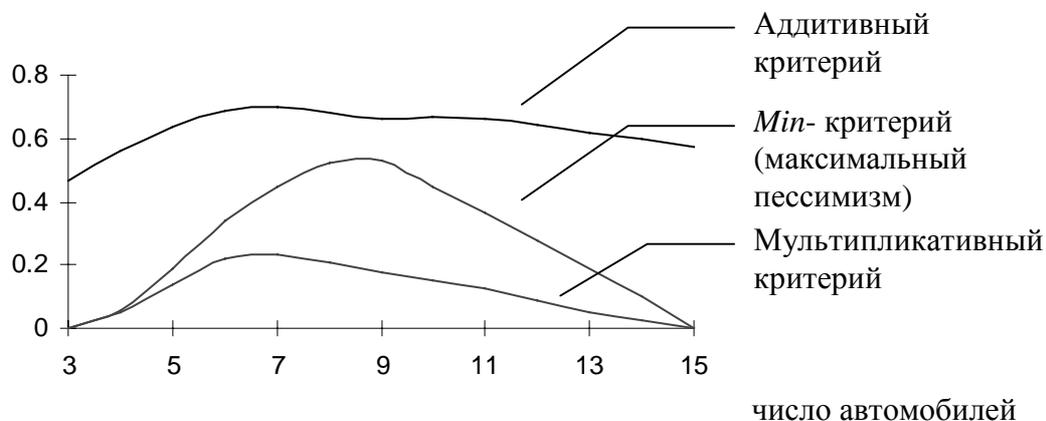


Рис. 5.15. Результаты решения задачи оптимизации с помощи имитационной модели на основе метода статистических испытаний

Как видно из рисунка, результаты решения задачи оптимизации для всех трех способов формирования глобального критерия весьма близки друг другу, что косвенно свидетельствует об адекватности применяемой методики

Для получения зависимости величины глобального критерия от количества автомобилей на основе результатов нечетко-интервального моделирования использовалась следующая методика:

- на основе нечетко-интервальной модели находились значения показателей качества в нечетко-интервальной форме для различного числа используемых автомобилей;
- при помощи найденных нечетко-интервальных значений показателей качества отыскивались максимальные и минимальные неинтервальные значения, принимаемые каждым из них при всех возможных значениях количества используемых автомобилей (фактически определялись нижние и верхние границы интервалов);
- на основании полученных граничных значений показателей качества для каждого из них строилась функция желательности;
- с помощью функций желательности и рассчитанных нечетко-интервальных значений показателей рассчитывались значения соответствующих частных критериев.
- на основе частных критериев путем их свертки находился глобальный критерий;
- путем максимизации глобального критерия находилось оптимальное число используемых автомобилей.

При этом учитывались следующие обстоятельства. Рассчитанные нечеткие интервалы показателей качества характеризуют своими функциями принадлежности возможность реализации тех или иных неинтервальных значений показателей качества внутри интервала, в то время как функции желательности в нашем случае отражают стремление снизить значения этих показателей независимо от их реализуемости. Таким образом, полученные нечеткие интервалы и соответствующие им функции желательности представляют собой взаимосвязанные пары критериев, отражающие противоречивые требования обеспечения реализуемости результата и снижения издержек. Последнее хорошо иллюстрирует рис. 5.16.

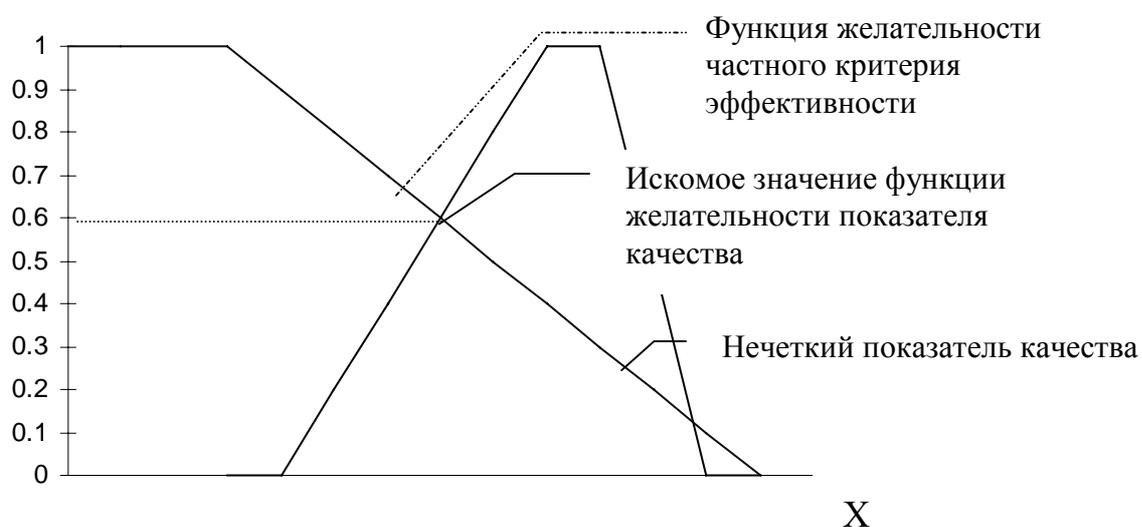


Рис.5.16. Нахождение значения функции желательности для нечетко-интервального значения частного показателя качества

В итоге, значения функций желательности, используемые при расчете глобальных критериев, находились путем решения дополнительной внутренней задачи двухкритериальной оптимизации при свертке функций желательности и соответствующих им функциям принадлежности нечетким интервалам показателей качества при коэффициентах относительной важности этих частных критериев, равных единице. Последнее было принято ввиду равнозначности рассматриваемых частных критериев. При этом в зависимости от того, какой вариант формирования глобального критерия принимался при решении общей задачи оптимизации, выбирался такой же способ решения рассматриваемой двухкритериальной задачи. Решение двухкритериальной задачи осуществлялось численными методами. Рис. 1.16 иллюстрирует процесс нахождения

требуемого значения функции желательности при использовании *min*-свертки частных критериев.

Результаты решения задачи оптимизации на основе нечетко-интервального моделирования для различных вариантов формирования глобального критерия приведены на рис. 5.17.

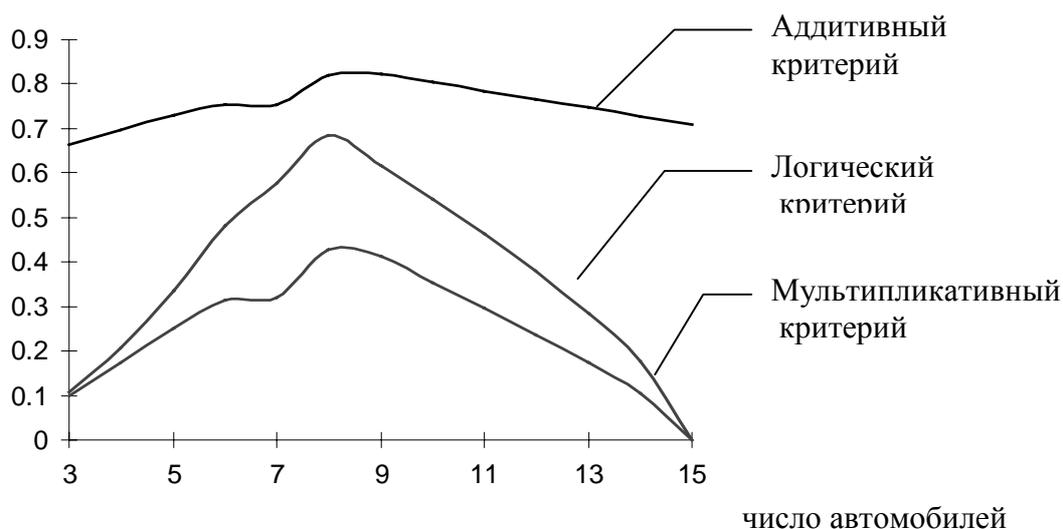


Рис. 5.17. Решение задачи оптимизации нечетко-интервальным методом

Сводные сравнительные данные о результатах решения задачи оптимизации для различных типов моделей и вариантах формирования глобального критерия приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2. Значения оптимального количества автомобилей, полученные при использовании различных моделей и различных методов формирования глобального критерия

	Аддитивный критерий	Мультипликативный критерий	Логический критерий
Имитационная модель на основе метода статистических испытаний	7	7	9
Нечетко-интервальная модель	9	8	8

Полученные результаты свидетельствуют о том, что использование нечетко-интервального подхода обеспечивает достаточно высокую точность и при решении задач многокритериальной оптимизации. Ясно, что при этом эффект применения нечетко-интервального подхода значительно выше, чем в случае прямого моделирования, поскольку задача оптимизации сама по себе требуют неизмеримо больше затрат машинного времени, чем простая имитация анализируемых систем. Рассмотренный простой методический пример однофакторной многокритериальной оптимизации позволяет сделать вывод, что постановка задачи в нечетко-интервальной форме дает возможность детально описать и учесть противоречивые требования к обеспечению экстремальных значений показателей качества и их реализуемость на практике.

Следует подчеркнуть, что последнее оказывается невозможным в рамках традиционного подхода к имитационному моделированию, основанному на методе статистических испытаний. Все это также свидетельствует о преимуществах метода нечетко-интервального моделирования.

§ 5.3. Нечеткая имитационная модель процесса производства строительных материалов

В завершение главы рассмотрим пример реализации нечетко-интервального подхода в построении модели функционирования реального предприятия. В качестве конкретного примера рассмотрим моделирование работы транспортно-сырьевого цеха Могилевского комбината силикатных изделий [120]. Цех предназначен для приема сырья, доставляемого различными видами транспорта (ж/д транспорт, автотранспорт), его хранения и первичной обработки. Он также должен обеспечивать своевременную транспортировку частично обработанных материалов в другие производственные цеха. Цех характеризуется большим количеством единиц установленного технологического оборудования, значительным числом сырьевых, материальных, транспортных и информационных потоков, не регулярностью и неритмичностью поставок, высокой степенью неопределенностью разброса характеристик и объемов используемых материалов.

Транспортно-сырьевой цех отличается значительным количеством материальных и информационных потоков, что значительно повышает сложность управления его работой. Это и послужило причиной того, что ТСЦ был выбран руководством предприятия как первостепенный объект моделирования, которое позволило бы выявить узкие места, выработать оптимальные производственно-административные решения для

совершенствования управления предприятием и пр. Обобщенная схема моделируемой системы представлена на рис. 5.18.

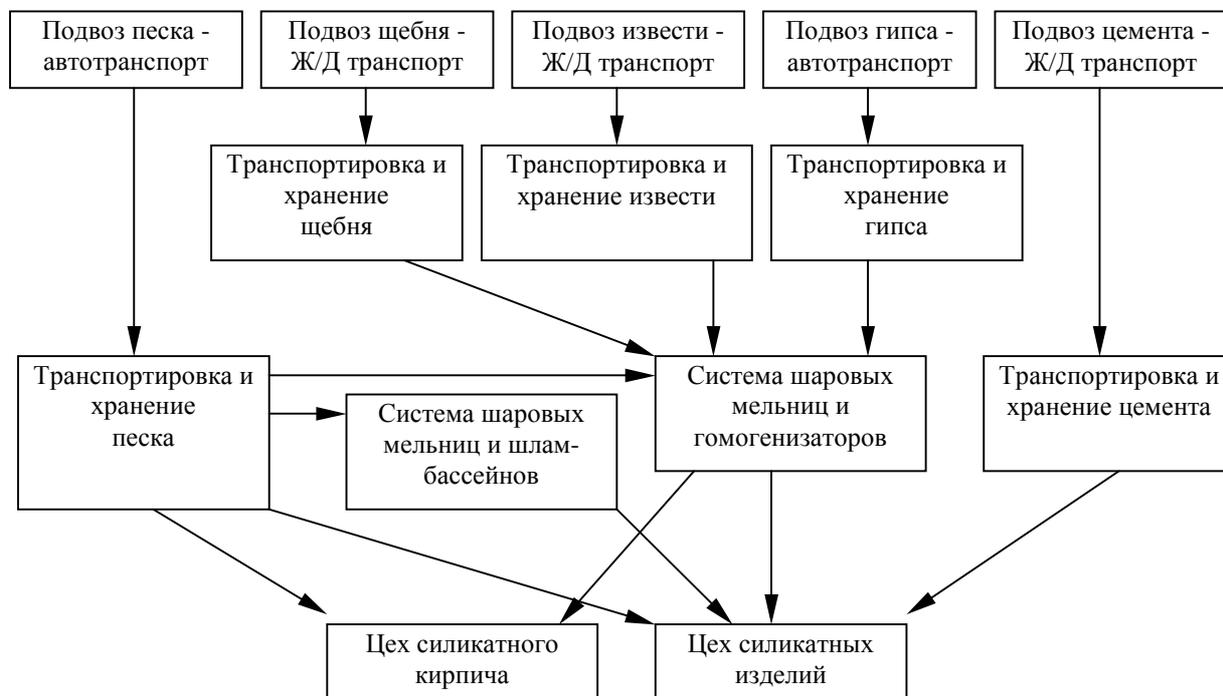


Рис. 5.18. Обобщенная схема транспортно-сырьевого цеха.

Используемое в работе цеха оборудование можно представить следующими основными группами:

1. приемники сырья с транспорта;
2. бункеры;
3. питатели;
4. транспортировочные конвейеры;
5. сито-бурат;
6. трубопроводы;
7. шаровые мельницы;
8. приемники материалов в других цехах.

Дадим краткие характеристики каждой из групп.

Приемники сырья с транспорта. Эти объекты служат для разгрузки транспорта и передачи сырья в приемный бункер. Они характеризуются следующими показателями: продолжительностью работы, количеством рейсов транспортных средств, грузоподъемностью транспортного средства, потребляемой электроэнергией. У приемника есть также параметр «содержание камней в песке», показывающий объемную долю (в процентах) камней в привезенном песке.

Бункеры. Служат для хранения сырья. Характеризуются параметрами: объемом бункера и резервным запасом (т.е. запасом, который должен содержать бункер до начала рабочего дня для обеспечения непрерывности работы в случае перебоев в снабжении комбината сырьем).

Питатели. Агрегаты, осуществляющие дозировку сырья при его подаче на конвейер или трубопровод. Характеризуются производительностью - количеством переданного сырья за единицу времени.

Транспортировочные конвейеры. Устройства, обеспечивающие транспортировку сырья от одного рабочего агрегата системы к другому. Они характеризуются длиной конвейера и его скоростью.

Сито-бурат. Установка служит для просеивания проходящего через него песка с возможностью перенаправления потока просеянного песка по одному из двух направлений.

Трубопроводы. Объекты, осуществляющие транспортировку, такую же, что и конвейеры, но, как правило, отличающиеся от последних значительно большей производительностью.

Шаровые мельницы. Агрегаты, обеспечивающие измельчение поступающего материала до необходимого состояния. Мельницы могут измельчать сразу несколько компонентов, приготавливая, таким образом, смеси, необходимые на других этапах производства. Эти устройства характеризуются производительностью - объемом материала, измельчаемого в единицу времени.

Приемники материалов в других цехах. Устройства, служат для приема в цехах предприятия поступающих материалов. Они характеризуются месячным объемом по каждому виду материалов (песок, цемент и др.), необходимым для производства запланированного объема продукции.

В основу построения балансовой модели деятельности цеха была положена детализированная схема его работы. Она представлена на рис. 5.19.

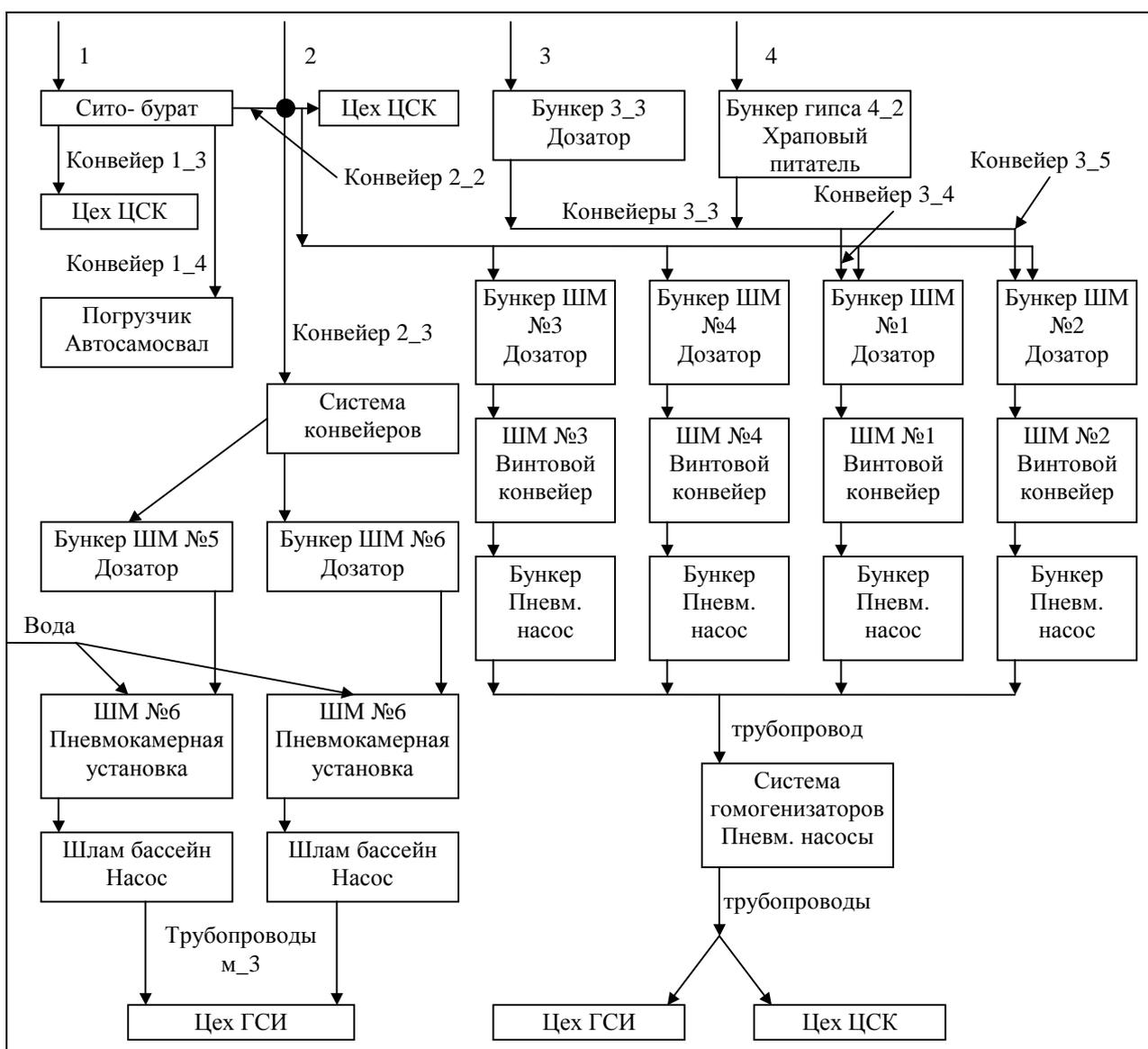
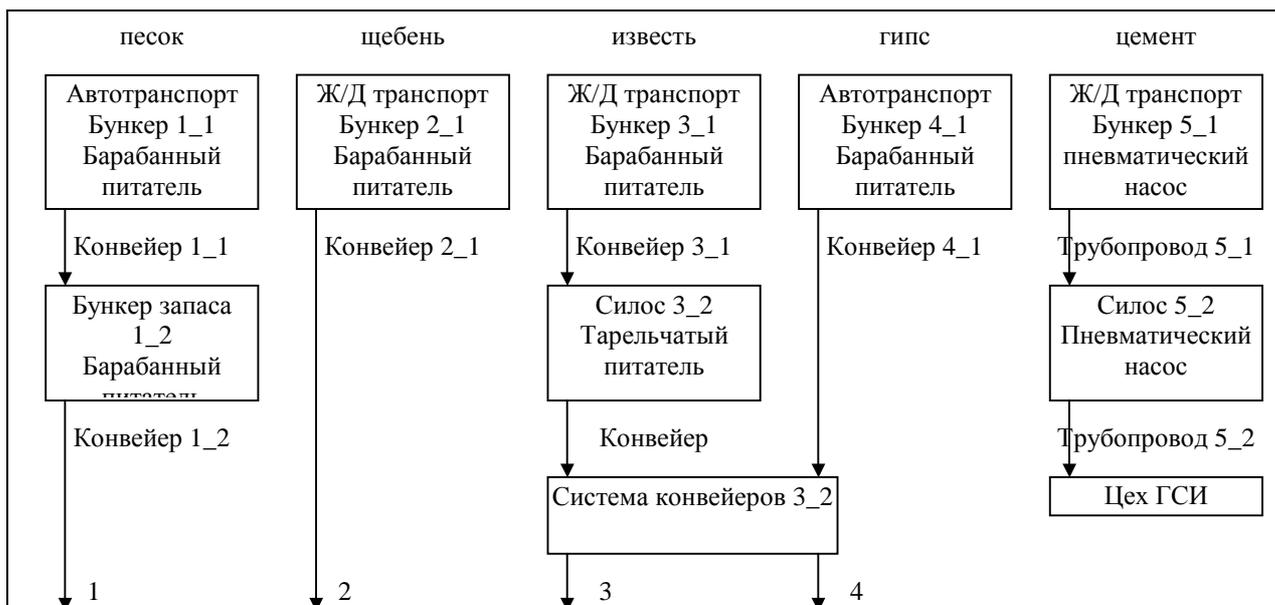


Рис. 5.19. Детализированная схема цеха

В соответствии с приведенной схемой производственный процесс представлялся совокупностью пяти базовых технологических линий по основным видам сырья (песок, щебень, известь, гипс и цемент). Работасть этих производственных линий организуется следующим образом.

Линия песка. Песок подвозится к месту выгрузки автотранспортом - грузовыми автомобилями со средней грузоподъемностью 30 м³. Продолжительность рабочего дня составляет 7 часов. Количество проходящих за день машин варьируется в зависимости от потребностей комбината в песке. Выгружаемое сырье проходит через решетку с размерами ячеек 12x12 см и попадает в приемный бункер. Этот бункер имеет сравнительно малую емкость, так как служит только для приема песка от разгружаемого автомобиля и дальнейшей транспортировки. Далее сырье с помощью барабанного питателя попадает на ленточный конвейер №1 (длина 63.5м), по которому транспортируется к бункеру запаса.

Бункер запаса является основным хранилищем запасов песка для нужд предприятия. Его полный объем составляет 660 м³, хотя при нормальной работе комбината было бы достаточно 450 м³. В бункере хранится резервный запас 100 м³ на случай перебоев в снабжении комбината песком. Посредством барабанного питателя сырье из бункера запаса укладывается на ленточный конвейер №2 (длина 59 м), по которому транспортируется к агрегату «Сито-бурат». Сито-бурат отсеивает из песка камни и сбрасывает их на ленточный конвейер №3 (длина 16 м). Собранные камни периодически (по мере накопления) вывозятся автопогрузчиком за территорию предприятия. Сито-бурат может работать в двух режимах отгрузки отфильтрованного песка: на конвейер №4 (длина 54.5 м) и на конвейер №5 (длина 33.5 м). Первый режим является для данного агрегата основным.

По конвейеру №4 сырье попадает в приемник песка цеха силикатного кирпича, где используется для изготовления силикатных кирпичей. Конвейер №5 служит для транспортировки песка к бункерам шаровых мельниц (ШМ №1 - №4 - шаровые мельницы сухого помола и ШМ №5 - №6 - шаровые мельницы мокрого помола) и, при необходимости, к приемнику цеха газо-силикатных изделий (ГСИ). При прохождении сырья над бункером нужной мельницы оно сбрасывается с конвейера, поэтому песок, как правило, не проходит по конвейеру полный путь (33.5 м). Для доставки сырья к бункерам мельниц влажного помола используется вспомогательный конвейер №6 (длина 29.5 м).

Из бункера мельницы влажного помола (емкость 15 м³) песок (с добавленной водой) с помощью пневматического насоса подается непосредственно в шаровую мельницу, где измельчается до необходимого состояния. Затем полученный шлам (молотый песок с водой

определенной плотности) попадает в шламбассейн, откуда через некоторое время перекачивается через трубопровод №1 в цех газо-силикатных изделий

В отличие от мельниц влажного помола, шаровые мельницы сухого помола работают без использования воды. В бункеры мельниц сухого помола №1 и №2 кроме песка могут добавляться также щебень, известь и гипс для получения специальных смесей при производстве некоторых видов бетона. Из бункера мельницы (емкость 20 м^3) исходный материал при помощи дозатора направляется непосредственно в шаровую мельницу. Готовый материал собирается в бункере (емкость 2.4 м^3) из которого периодически (при заполнении бункера) откачивается пневматическим насосом через трубопровод №2 в систему гомогенизаторов (семь гомогенизаторов общей емкостью 350 м^3). Через некоторое время материал из гомогенизатора перекачивается пневматическим насосом через трубопровод №3 в цех ГСИ или через трубопровод №4 в цех силикатного кирпича (ЦСК). Трубопровод выбирается в зависимости от содержимого конкретного гомогенизатора.

Линия щебня. Щебень подвозится на предприятие с помощью ж/д транспорта. Емкость одного вагона - 80 м^3 . Количество разгружаемых вагонов варьируется в зависимости от потребностей комбината в щебне. Выгружаемый щебень попадает в приемный бункер (емкость 10 м^3), который служит только для временного хранения разгружаемого сырья. Приемный бункер является единственным в линии щебня, и сырье находится, в основном, в вагонах, выгружаясь лишь по мере необходимости. Из приемного бункера щебень с помощью барабанного питателя попадает на конвейер №7 (длина 10м). Далее сырье перебрасывается на конвейер №5 (линия песка) и транспортируется в бункеры мельниц сухого помола (шаровые мельницы №1 - №2) и цех ГСИ. Из бункеров мельниц сухого помола щебень движется аналогично песку.

Линия извести. Известь подвозится на предприятие при помощи ж/д транспорта. Емкость одного вагона - 80 м^3 . Продолжительность рабочего дня рабочих разгрузочной секции - 7 часов. Разгружаемая известь попадает в приемный бункер (емкость 6 м^3), который служит лишь для промежуточного хранения сырья. Из приемного бункера с помощью барабанного питателя известь попадает на конвейер №8 (длина 85м), по которому перемещается до бункера запаса (емкость 250 м^3). Бункер запаса предназначен для хранения основного запаса извести и обеспечения бесперебойной работы комбината в случае перебоев с транспортом (резервный запас бункера - 100 м^3).

С помощью тарельчатого питателя известь из бункера запаса укладывается на ленточный конвейер №9 (длина 110м), по которому перемещается до бункера извести (емкость 15 м^3). Из бункера извести сырье с помощью дозатора попадает на конвейер №10

(длина 10м), по которому известь попадает в бункеры шаровых мельниц и цех ГСИ. Из бункеров мельниц сухого помола известь движется аналогично движению песка.

Линия гипса. Гипс подвозится к предприятию при помощи автотранспорта. При разгрузке гипс попадает в приемный бункер (емкость 3 м^3), из которого с помощью барабанного питателя укладывается на конвейер №11 (длина 17м). После перемещения по этому конвейеру, сырье перебрасывается на конвейер №9 (линия извести), по которому транспортируется до бункера гипса (емкость 8 м^3).

Из бункера гипса сырье с помощью храпового питателя попадает на ленточный конвейер №10 (линия извести), по которому перемещается до бункеров шаровых мельниц сухого помола (ШМ №1 - №2) и к цеху ГСИ. Из бункеров мельниц сухого помола известь движется аналогично движению песка.

Линия цемента. Цемент подвозится на предприятие при помощи ж/д транспорта. Выгружаемый из вагона цемент попадает в приемный бункер (емкость 50 м^3). Из приемного бункера цемент выкачивается пневматическим насосом и по трубопроводу №5 попадает в силос (емкость 960 м^3). Силос является основным хранилищем цемента, обеспечивающим бесперебойное снабжение цементом при перебоях с ж/д транспортом (резервный запас - 100 м^3). Из силоса цемент при помощи пневматического насоса перекачивается по трубопроводу №6 в цех ГСИ.

Рассматриваемый процесс характеризуется значительным числом неопределенных параметров. Получение для них частотных распределений в принципе возможно, однако требует значительных затрат времени и средств. При этом, в силу непрерывно изменяющихся условий функционирования системы (частые изменения оперативных планов производства, неплановые ремонты, замена оборудования и пр.) частотные распределения являются нестационарными и к моменту их использования теряют значительную часть информации. В то же время накопленный опыт позволяет технологам оценить нижние и верхние границы изменения параметров оборудования, и указывать диапазоны их наиболее возможных значений. Это создает предпосылки для использования нечетко-интервального подхода при моделировании деятельности цеха.

В соответствии с описанной производственной структурой математическая модель деятельности цеха была построена как совокупность уравнений балансовых потоков сырья по технологическим линиям и отдельным агрегатам. Также как и в предыдущей задаче на первом этапе нечетко-интервального моделирования строилась детерминированная балансовая модель производства. Она состояла из следующих соотношений.

Дневная потребность комбината в песке:

$$W_{nec} = \frac{\sum_{i=1}^6 W_{nec_i}}{D}; \quad (5.15)$$

где W_{nec_i} - месячная потребность i -го цеха в песке, м³/мес; D - число дней в месяце.

Количество сырья, проходящего через конвейеры 1_1, 1_2, 1_3 и 1_4:

$$C_{w1_1} = C_{w1_2} = W_{nec}; \quad (5.16)$$

$$C_{w1_3} = \frac{W_{nec_1}}{D}; \quad (5.17)$$

$$C_{w1_4} = \frac{W_{nec} \cdot Rn}{100}; \quad (5.18)$$

где Rn - количество камней в песке, %.

Число рейсов, необходимое для подвоза песка:

$$T_{nec_M} = \frac{W_{nec}}{T_{nec_3}}; \quad (5.19)$$

где T_{nec_3} - объем сырья, перевозимый за один рейс, м³.

Максимальная загрузка бункеров 1_1 и 1_2:

$$B_{1_1MAX} = T_{nec_3}; \quad (5.20)$$

$$B_{1_2MAX} = B_{1_2P} + W_{nec} \left(1 - \frac{T_{nec_{PD}}}{24} \right); \quad (5.21)$$

где B_{1_2P} - резервный запас бункера 1_2, м³; $T_{nec_{PD}}$ - продолжительность рабочего дня автотранспорта, ч.

Песок из бункера запаса используется круглосуточно, а автомобильный транспорт в течение семи часов. Таким образом, максимальное наполнение бункера будет достигаться к окончанию рабочего дня автотранспорта.

Дневная потребность комбината в щебне:

$$W_{\text{щб}} = \frac{\sum_{i=1}^6 W_{\text{щб}_i}}{D}; \quad (5.22)$$

где $W_{\text{щб}_i}$ - месячная потребность i -го цеха в щебне, м³/мес.

Количество сырья, проходящего через конвейеры 2_1:

$$C_{w_{2_1}} = W_{\text{щб}}; \quad (5.23)$$

Число вагонов, необходимое для подвоза щебня:

$$T_{\text{щб}_M} = \frac{W_{\text{щб}}}{T_{\text{щб}_3}}; \quad (5.24)$$

где $T_{\text{щб}_3}$ - объем сырья, перевозимый одним вагоном, м³.

Максимальная загрузка бункера 2_1:

$$B_{2_1, \text{MAX}} = T_{\text{щб}_3}; \quad (5.25)$$

Так как объем приемного бункера щебня значительно меньше объема разгружаемого вагона, сырье хранится в вагоне, из которого и выгружается в приемный бункер по мере необходимости. Сам же приемный бункер обычно загружен полностью и служит скорее для обработки, чем для хранения щебня.

Количество сырья, проходящего через конвейеры 2_2, 2_3:

$$C_{w_{2_2}} = W_{\text{нec}} - C_{w_{1_3}} + C_{w_{2_1}}; \quad (5.26)$$

$$C_{w_{2_3}} = \frac{W_{\text{нec}_2}}{D}; \quad (5.27)$$

Количество сырья, проходящего через трубопроводы м_3:

$$C_{w_{M_3}} = C_{w_{2_3}}; \quad (5.28)$$

Дневная потребность комбината в извести:

$$W_{изв} = \frac{\sum_{i=1}^6 W_{изв_i}}{D}; \quad (5.29)$$

где $W_{изв_i}$ - месячная потребность i -го цеха в щебне, м³/мес.

Количество сырья, проходящего через конвейеры 3_1:

$$C_{w3_1} = W_{изв}; \quad (5.30)$$

Число вагонов, необходимое для подвоза щебня:

$$T_{изв_M} = \frac{W_{изв}}{T_{изв_3}}; \quad (5.31)$$

где $T_{изв_3}$ - объем сырья, перевозимый одним вагоном, м³.

Максимальная загрузка бункеров 3_1, 3_2:

$$B_{3_1MAX} = T_{изв_3}; \quad (5.32)$$

$$B_{3_2MAX} = B_{3_2P} + W_{изв} \left(1 - \frac{T_{изв_{рД}}}{24} \right); \quad (5.33)$$

где B_{3_2P} - резервный запас бункера 3_2, м³; $T_{изв_{рД}}$ - продолжительность рабочего дня разгрузчика, ч.

Так как объем приемного бункера извести значительно меньше объема разгружаемого вагона, сырье хранится в вагоне, из которого и выгружается в приемный бункер по мере необходимости. Сам же приемный бункер обычно загружен полностью и служит скорее для обработки, чем для хранения извести.

Известь из бункера запаса используется в течение суток (комбинат работает круглосуточно), а разгрузчик в течение семи часов. Таким образом, максимальное наполнение бункера будет достигаться к окончанию рабочего дня разгрузчика.

Дневная потребность комбината в гипсе:

$$W_{гипс} = \frac{\sum_{i=1}^6 W_{гипс_i}}{D}; \quad (5.34)$$

где $W_{гипс_i}$ - месячная потребность i -го цеха в гипсе, м³/мес.

Количество сырья, проходящего через конвейер 4_1:

$$C_{W_{4_1}} = W_{гипс}; \quad (5.35)$$

Число рейсов, необходимое для подвоза гипса:

$$T_{гипс_M} = \frac{W_{гипс}}{T_{гипс_3}}; \quad (5.36)$$

где $T_{гипс_3}$ - объем сырья, перевозимый за один рейс, м³.

Максимальная загрузка бункера 4_1:

$$B_{4_1MAX} = T_{гипс_3}; \quad (5.37)$$

Количество сырья, проходящего через конвейеры 3_2, 3_3, 3_4, 3_5:

$$C_{W_{3_2}} = C_{W_{3_1}} + C_{W_{4_1}}; \quad (5.38)$$

$$C_{W_{3_3}} = C_{W_{3_2}}; \quad (5.39)$$

$$C_{W_{3_4}} = C_{W_{3_5}} = \frac{C_{W_{4_2}}}{2}; \quad (5.40)$$

Количество сырья, проходящего через конвейеры м_1, м_2:

$$C_{W_{M_1}} = C_{W_{2_2}} - C_{W_{2_3}} + C_{W_{3_3}}; \quad (5.41)$$

$$C_{W_{M_2}} = C_{W_{M_1}}; \quad (5.42)$$

Дневная потребность комбината в цементе:

$$W_{цем} = \frac{\sum_{i=1}^6 W_{цем_i}}{D}; \quad (5.43)$$

где $W_{цем_i}$ - месячная потребность i -го цеха в гипсе, м³/мес.

Количество сырья, проходящего через трубопроводы 5_1, 5_2:

$$C_{W5_1} = C_{W5_2} = W_{цем}; \quad (5.44)$$

Число вагонов, необходимое для подвоза цемента:

$$T_{цем_M} = \frac{W_{цем}}{T_{цем_3}}; \quad (5.45)$$

где $T_{цем_3}$ - объем сырья, перевозимый в одном вагоне, м³.

Максимальная загрузка бункеров 5_1, 5_2:

$$B_{5_1MAX} = T_{цем_3}; \quad (5.46)$$

$$B_{5_2MAX} = B_{5_2P} + W_{цем} \left(1 - \frac{T_{цем_{PD}}}{24} \right); \quad (5.47)$$

где B_{5_2P} - резервный запас бункера 5_2, м³; $T_{цем_{PD}}$ - продолжительность рабочего дня разгрузчика, ч.

Построенная система моделей (5.15)÷(5.47) дополнялась балансовыми уравнениями суммарного суточного потребления энергии, находившегося как сумма произведений времени работы агрегата на потребляемую им мощность.

На следующем этапе производилось нечетко-интервальное расширение балансовой модели (5.15)-(5.47) путем непосредственной замены в ней неопределенных параметров соответствующими нечеткими интервалами, полученными путем опроса технологов, анализа паспортных данных и результатов текущих испытаний оборудования.

Для реализации модели разработано прикладное программное обеспечение. Была создана библиотека, содержащая описание нечетко-интервальных чисел (интервалов) и процедур работы с ними. Для описания был использован программный модуль, содержащий описание нечетко-интервального числа в четырехреперном виде (трапецеидальная форма) и

набор процедур и функций, реализующих все необходимые арифметические действия с нечеткими интервалами: сложение, вычитание, умножение, деление и т.д.

Для этого использовались методы объектно-ориентированного программирования. В составе модели были описаны основные объекты, принимающие участие в производственном процессе: бункер, конвейер, питатель и т.д., была учтена специфика каждого объекта. Так, для бункера часть параметров описывалась четкими числами (например, общий объем бункера), а часть — нечеткими интервалами (текущее заполнение, потребляемая мощность). К методам (функциям) объекта относятся процедуры, принадлежащие объекту, которые или описывают выполнение определенных действий объекта или манипулируют со свойствами объекта (работать со свойствами объекта напрямую не рекомендуется). К методам описанных объектов следует отнести процедуры просмотра значений свойств объекта и редактирования исходных данных объекта.

Дальнейшее моделирование осуществлялось как взаимодействие объектов. Так, например, при наличии в бункере сырья для транспортировки, бункер передает последующему питателю (дозатору и т.д.) столько сырья, сколько позволяет производительность последнего. Переданное сырье, в свою очередь, передается питателем на соответствующий конвейер, который через некоторое время доставит сырье к приемному бункеру, увеличивая его заполнение и т.д.

Разработанная методика реализована в виде пакета прикладных программ, позволяющего в интерактивном режиме задавать и корректировать исходные данные о производительности, энергоемкости, временных характеристиках технологических процессов и пр., получать полную прогнозную информацию о потребностях в зависимости от заказа конкретных видов сырья, транспорта, времени, энергоресурсов и т.д. (рис.5.20). Система также позволяет оценивать эффективность использования оборудования цеха при любых режимах функционирования, имитировать поведение структурных реорганизаций: замену состава оборудования, изменение технологических маршрутов, диверсификацию сырьевых потоков.

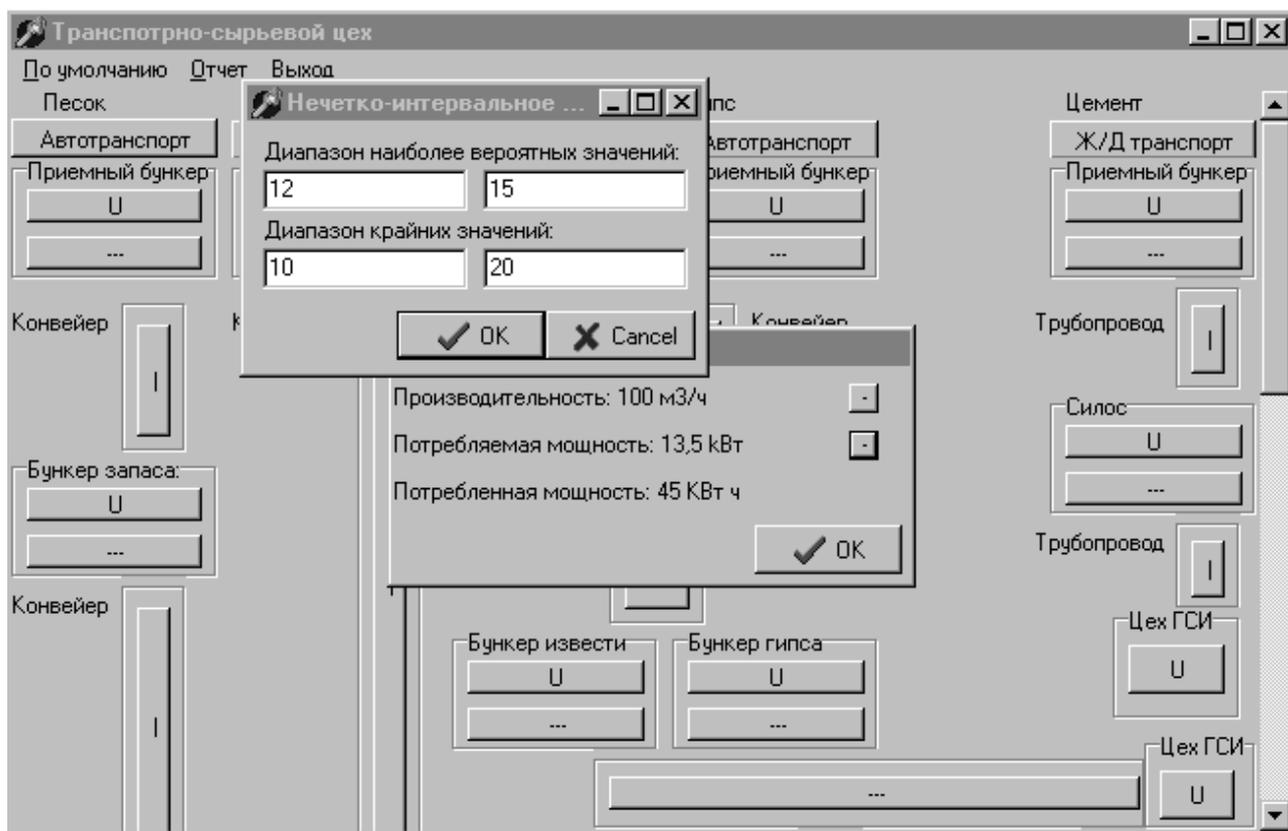


Рис. 5.20. Ввод (редактирование) числа, представленного в нечетко-интервальной форме

Внедрение разработанного прикладного программного обеспечения позволило повысить качество оперативного планирования, оценить различные альтернативы деятельности предприятия в условиях неизбежных неопределенностей, а также путем имитации работы цеха в различных режимах выявить узкие места технологического процесса и предложить пути совершенствования организации производства.

Описанная модель и реализующее ее программное обеспечение носят открытый характер и могут быть легко адаптированы к специфическим условиям работы других цехов различных предприятий.

ГЛАВА 6. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕХНОГЕННЫХ ПОСЛЕДСТВИЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИРОДООХРАННОЙ, ОЗДОРОВИТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Процессы производства сопровождаются образованием большого количества вредных выбросов и веществ, загрязняющих окружающую среду и наносящих вред здоровью населения. Полное решение этой проблемы путем создания абсолютно экологически чистых производств можно рассматривать как одну из приоритетных задач технологического прогресса. Однако на современном этапе можно говорить только о возможности отыскания некоторого компромисса между возрастающими материальными потребностями и негативными техногенными последствиями производственной деятельности, удовлетворяющей эти потребности. Ясно, что речь идет о компромиссе между стремлениями с сохранив экологически чистую окружающую среду и увеличить общественное богатство. Как отмечалось в главе 2, наличие противоречивых частных критериев почти автоматически приводит к необходимости учета субъективной неопределенности в постановке многокритериальных оптимизационных задач (задач поиска компромиссных решений). Поэтому анализ описанных проблем будем проводить с использованием методологии теории нечетких множеств.

Состояние здоровья населения (СЗН) является отражением сложного комплекса явлений в окружающей среде. На процесс его формирования влияет целый ряд социально-экономических, а также, биологических, антропогенных, природно-климатических и других факторов, в совокупности определяющих экологическую обстановку обследуемых регионов. Для оценки экологического состояния (ЭС) необходимо экологическое картографирование местности и создание базы данных по измеренным факторам загрязнения среды – химического, радиационного и др. Для выработки в регионе адекватных управленческих и медико-профилактических решений ЭС и СЗН должны оцениваться по множеству частных факторов, таких как концентрации тяжелых металлов, ионов, органических веществ и пр. Часть из этих характеристик может быть с той или иной точностью измерена (концентрации элементов и иные показатели). Другая часть может быть задана в нечеткой вербальной форме (например, степень выраженности тех или иных заболеваний у населения или степень его санитарно-гигиенической просвещенности).

Каждый из явно или неявно определённых показателей порождает соответствующий частный критерий ЭС или СЗН, формализация которого не тривиальна. Построение частного критерия по принципу: фактор имеет значение концентрации меньшее, чем предельно допустимое (ПДК), - все хорошо, большее - все плохо, не

является подходящим решением вопроса, поскольку на практике далеко не безразлично насколько измеренный фактор ниже ПДК. Кроме того часто встречаются ситуации, когда какие-то факторы взаимосвязаны (что можно определить на этапе предварительного статистического анализа данных), причем улучшение по одному из показателей ведет к ухудшению по другим.

Традиционные теоретико-вероятностные методы, в силу своей аксиоматики, не приспособлены для обработки информации такого типа, и долгое время наличие описанных выше трудностей попросту игнорировалось. Ясно, что исключение из рассмотрения качественной информации, источником которой, зачастую, является богатый опыт и интуиция квалифицированных специалистов и лиц, принимающих управленческие решения, придает результатам лишь видимость объективности, на деле упрощая постановку решаемых задач, уводя их от реальных потребностей практики.

Определение количественных оценок качества ЭС и СЗН, необходимых для изучения влияния ЭС на СЗН, является в настоящее время актуальной задачей, несмотря на то, что этой проблеме посвящено большое число работ [252, 50, 316, 115]. В литературе предлагаются различные методологические подходы, направленные на решение этой задачи. Однако анализ показывает, что они не учитывают многие важные аспекты, особенно касающиеся вклада качественной и субъективной информации о характеристиках и показателях качества явлений.

6.1. Многокритериальные оценки качества воздушной среды и состояния здоровья населения в областном центре

Интегральные оценки состояния здоровья населения и окружающей среды найдем на основе построения обобщенных критериев ЭС и СЗН как сверток частных критериев с учетом коэффициентов их относительной важности. Необходимая исходная информация о составе частных критериев ЭС и СЗН была получена на основе данных, предоставленных городским центром эпидемиологии и гигиены г. Могилева (Республика Беларусь) и лабораторией анализа и моделирование медико-биологических систем БелНИИЭПП. В состав показателей входили данные по динамике и кратности превышения ПДК основными загрязнителями атмосферного воздуха в 1983-1997 г.г. и по заболеваемости населения г. Могилева по обращаемости в 1988 - 1998 г.г. по данным системы АГИС - "Здоровье" на выборке в 65 тыс. человек.

В состав основных загрязнителей атмосферного воздуха входили следующие компоненты: сероуглерод, сероводород, спирт метиловый, параксилон,

диметилтерефталат, фенол, сернистый ангидрид, динил, двуокись азота, окись азота, взвешенные вещества, окись углерода, свинец, цинк, медь, бензапирен.

Данные по заболеваемости населения включали в себя следующие заболевания: новообразования, ревматизм в активной фазе, гипертония, ИБС, острый инфаркт миокарда, стенокардия, хронические фарингиты и назофарингиты, хронические болезни миндалин, пневмония, хронический бронхит и эмфизема, бронхиальная астма, язва желудка, хронический гастрит, желчекаменная болезнь, нефриты и нефрозы, atopический дерматит.

Статистическая обработка данных наблюдений по г. Могилеву за 10 лет выявила статистически значимые зависимости заболеваемости хроническим гастритом, хроническим бронхитом и atopическим дерматитом от уровня содержания в атмосферном воздухе сероуглерода, сероводорода и сернистого ангидрида.

В связи с этим состояние ЭС оценивалось по содержанию в атмосферном воздухе следующих компонентов: сероуглерод, сероводород, сернистый ангидрид.

Для дальнейших расчетов было использовано разработанное базовое программное обеспечение (глава 2), адаптированное для решения задач многокритериальной оценки и оптимизации качества воздушной среды в областном центре при изучении ее влияния на состояние здоровья населения при ограничениях финансового характера.

Для свертки частных критериев в обобщенный критерий частные критерии были приведены к общей норме. Для этого использовался математический аппарат теории нечетких множеств. Приведем пример построения частного критерия в форме унифицированной функции желательности для такого важного количественного показателя, как концентрация сероводорода в воздухе C ($\text{мг}/\text{м}^3$). Известно, что существует предельно допустимая концентрация (ПДК) сероводорода, равная 0.008, выше которой концентрация C недопустима. В этом случае значения $C < \text{ПДК}$ допустимы, причем степень этой желательности концентраций растет с уменьшением C . Для формализации этой ситуации в рамках теории нечетких множеств используем функцию желательности, с линией обратной зависимости желательности от концентрации. На рис. 6.1 приведен фрагмент интерфейса программного обеспечения, содержащий типы функций желательности и опорные точки для компонент загрязнения атмосферы, а также функцию желательности для сероводорода.

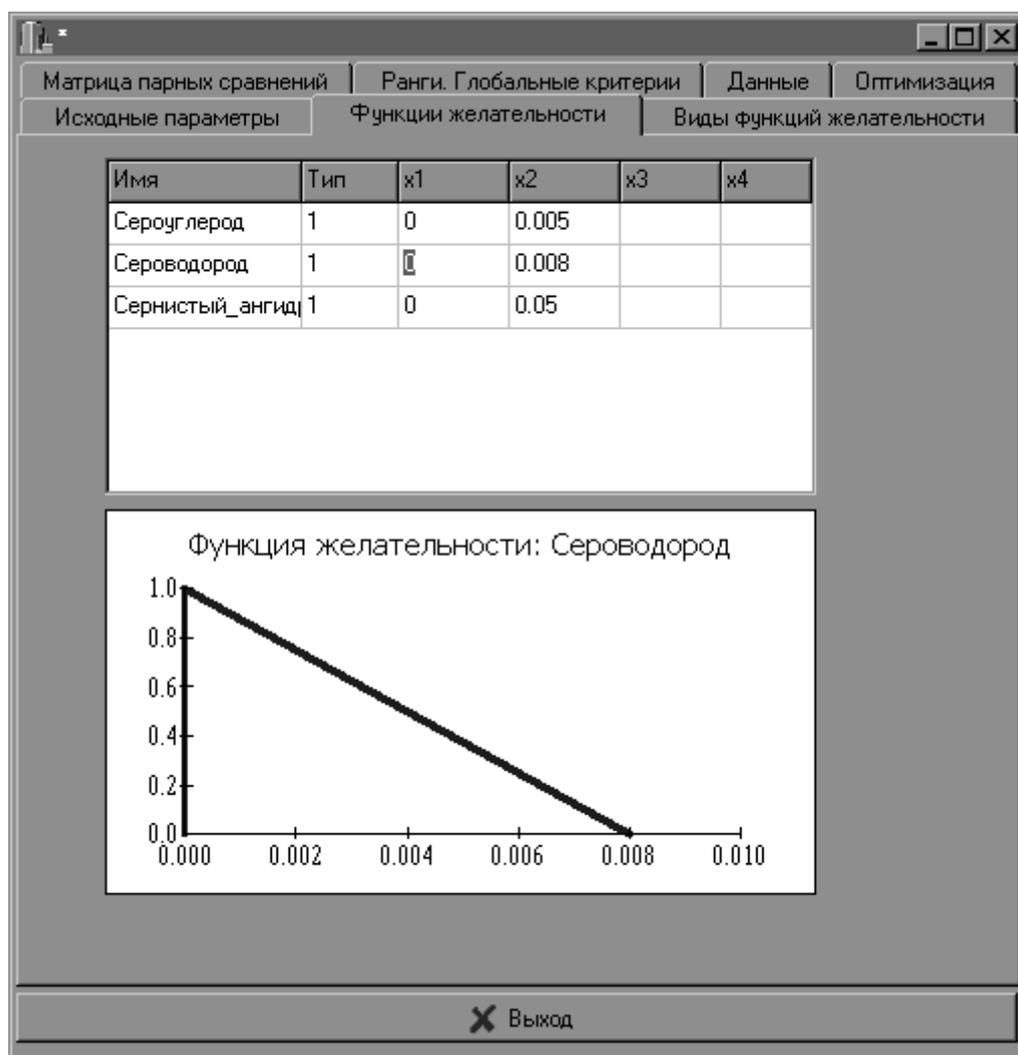


Рис. 6.1. Фрагмент интерфейса для интерактивного формирования функций желательности.

В таблице 6.1 приведены ранги (степени отрицательного влияния на здоровье) основных загрязнителей, полученные с помощью матрицы парных сравнений на основе методики, описанной выше в главе 2 II. Из таблицы видно, что наибольшие ранги получают вещества, имеющие наивысший класс опасности согласно списку ПДК загрязнений [133].

Таблица 6.1 - Ранги основных загрязнителей атмосферного воздуха г. Могилева

Сероуглерод	1.3
Сероводород	1.3
Сернистый ангидрид	0.4

В соответствии с выявленными основными загрязнителями и рангами их значимости состояние здоровья населения оценивалось по следующим заболеваниям,

связанным с загрязнениями атмосферного воздуха: хроническим гастритом, хроническим бронхитом и атопическим дерматитом. Были построены функций желательности такие же по форме, как представленная на рис.6.1. При этом за x_1 принимали нулевые значения заболеваемости при отсутствии заболеваний, или минимальные зарегистрированные значения этих заболеваний. За x_2 принимали максимальные зарегистрированные значения показателей заболеваемости в наиболее неблагоприятных районах. Ранги во всех случаях принимали равными единице.

Расчет глобальных критериев качества экологического состояния проводился по выражениям, соответствующим:

критерию максимального пессимизма

$$D1(C_1, C_2, C_3) = \min(\mu_1(C_1)^{\alpha_1}, \mu_2(C_2)^{\alpha_2}, \mu_3(C_3)^{\alpha_3}), \quad (6.1)$$

мультипликативному критерию

$$D2(C_1, C_2, C_3) = \mu_1(C_1)^{\alpha_1} * \mu_2(C_2)^{\alpha_2} * \mu_3(C_3)^{\alpha_3}, \quad (6.2)$$

аддитивному критерию

$$D3(C_1, C_2, C_3) = (\alpha_1\mu_1(C_1) + \alpha_2\mu_2(C_2) + \alpha_3\mu_3(C_3)) / 3, \quad (6.3)$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, C_1, C_2, C_3$ функции желательности, ранги и концентрации сероуглерода, сероводорода и сернистого ангидрида соответственно.

Аналогично рассчитывались глобальные критерии качества СЗН.

В таблицах 6.2 и 6.3 приведены рассчитанные значения глобальных критериев ЭС и СЗН за исследуемый период времени.

Из таблицы 6.2 видно, что все значения критериев $D1$ и $D2$ равны 0. Это говорит о том, что как минимум один из загрязнителей воздуха в среднем в течение каждого рассматриваемого года превышал ПДК и критерии $D1$ и $D2$ в этой ситуации оказываются несостоятельными. Наиболее информативным и полезным в данной ситуации оказался аддитивный критерий $D3$, который и рассматривался в дальнейшем, как обобщенный критерий экологического состояния $D_{ЭС}(C_1, C_2, C_3)$. Из данных таблицы 6.2 следует, что наихудшими с точки зрения состояния ЭС для г. Могилева были 1988 и 1990 годы, а наилучшим 1997. Таким образом, данная методика позволяет следить за динамикой состояния воздушного бассейна в целом, а не только по отдельным составляющим загрязнения.

Таблица 6.2. Глобальные критерии качества ЭС за период с 1988 по 1997 годы

Год	Максиминный $D1$	Мультипликативный $D2$	Аддитивный $D3$
1988	0	0	0.30

1989	0	0	0.33
1990	0	0	0.30
1991	0	0	0.46
1992	0	0	0.46
1993	0	0	0.47
1994	0	0	0.50
1995	0	0	0.50
1996	0	0	0.50
1997	0	0	0.53

Таблица 6.3. Глобальные критерии СЗН за период с 1988 по 1997 годы

Год	Максиминный $D1$	Мультипликативный $D2$	Аддитивный $D3$
1988	0	0	0.02
1989	0	0	0.01
1990	0	0	0.04
1991	0.18	0.02	0.29
1992	0.30	0.05	0.36
1993	0.48	0.13	0.51
1994	0.32	0.12	0.53
1995	0.47	0.18	0.57
1996	0.57	0.27	0.66
1997	0.13	0.03	0.34

На основе анализа результатов, представленных в таблице 6.3 также, как и в случае ЭС, можно сделать вывод о предпочтительности использования в данном случае аддитивного способа формирования глобального критерия, который в дальнейшем рассматривался в качестве обобщенного критерия состояния здоровья населения $D_{СЗН}$.

6.2. Оптимизация регионального бюджета природоохранной, оздоровительной деятельности

На основе полученных результатов была разработана модель оптимального распределения бюджетных средств, предназначенных для улучшения экологического состояния воздушной среды на региональном уровне. При этом учитывалась специфика загрязняющих факторов и существующая экономическая ситуация, определяющая

основные ограничения при принятии оптимальных управленческих решений по охране здоровья населения и окружающей среды. Математическая модель была построена в виде системы регрессионных зависимостей.

В основу построения модели положено существование прямой связи между затратами, предназначенными на очищение атмосферного воздуха и концентрацией загрязняющих веществ в нем, а также наличие пропорциональной зависимости между концентрациями веществ в воздухе и объемами их выбросов.

Для получения соответствующих регрессионных зависимостей были использованы данные городской инспекции природных ресурсов г. Могилева о количестве выбросов сероуглерода, сероводорода и сернистого ангидрида промышленными предприятиями города, а также сведения о затратах по их снижению по годам за период с 1987 по 1999гг. (в ценах 1987 г.).

На основе этих данных были рассчитаны затратные коэффициенты K_i , характеризующие количество денежных средств, необходимое для снижения выбросов каждого конкретного загрязнителя на одну тонну. Для реальных исходных данных получено, что для снижения выбросов сероуглерода на одну тонну необходимо затратить $K_1 = 1.845$ руб, для снижения выбросов сероводорода на одну тонну необходимо затратить $K_2 = 6.289$ руб, для снижения выбросов сернистого ангидрида на одну тонну необходимо затратить $K_3 = 0.154$ руб.

На основе идентификации зависимостей концентраций сероводорода, сероуглерода и сернистого ангидрида в атмосфере от величин выбросов, выявлена прямая статистически значимая связь между выбросами – V_i (тыс. тонн) и концентрациями веществ в воздухе – C_i (мг/м³):

$$C_1 = 0.00373 + 0.00327 * V_1, \quad (6.4)$$

$$C_2 = 0.00048 + 0.00186 * V_2, \quad (6.5)$$

$$C_3 = 0.0007 + 0.00033 * V_3, \quad (6.6)$$

где V_1, V_2, V_3 - выбросы сероводорода, сероуглерода, сернистого ангидрида соответственно.

Задача оптимизации бюджета на природоохранную, оздоровительную деятельность ставилась следующим образом. Пусть затраты на очищение воздуха от отдельных загрязняющих веществ равны z_1, z_2, \dots, z_n , где n - количество наблюдаемых загрязняющих веществ, и Z - бюджет города, предназначенный на борьбу с загрязнениями воздуха. Тогда для рассматриваемого случая $n=3$ очевидно выполняются соотношения:

$$z_1 + z_2 + z_3 = Z, \quad (6.7)$$

По данным городской инспекции природных ресурсов г. Могилева в 1999 году были зарегистрированы выбросы сероводорода, сероуглерода, сернистого ангидрида в объемах 5.154 тыс.т, 0.881 тыс.т и 18.203 тыс.т, соответственно. На основе этих данных и рассчитанных затратных коэффициентов K_i получены следующие выражения для расчета итоговых объемов выбросов после проведения экологических мероприятий:

$$V_1 = 5.154 - \frac{z_1}{1000K_1}, \quad V_2 = 0.881 - \frac{z_2}{1000K_2}, \quad V_3 = 18.203 - \frac{z_3}{1000K_3},$$

из которых позволяют определить явные зависимости концентраций веществ в атмосфере от затрат на их снижение:

$$C_1 = 0.00373 + 0.00327 * \left(5.154 - \frac{z_1}{1000K_1} \right), \quad (6.8)$$

$$C_2 = 0.00048 + 0.00186 * \left(0.881 - \frac{z_2}{1000K_2} \right), \quad (6.9)$$

$$C_3 = 0.0007 + 0.00033 * \left(18.203 - \frac{z_3}{1000K_3} \right). \quad (6.10)$$

На основе соотношений (6.8)-(6.10) далее отыскивались зависимости между значениями глобальных критериев состояния здоровья населения ($D_{СЗН}$) и атмосферного воздуха ($D_{ЭС}$). При этом в расчетах применялись аддитивные формы глобальных критериев, взятые из четвертых столбцов таблиц 6.2 и 6.3, соответственно. В результате статистического анализа была получена следующая регрессионная зависимость (критерией Фишера $F = 29.17, p < 0.0006$):

$$D_{СЗН} = -0.709 + 2.396 * D_{ЭС}. \quad (6.11)$$

В построенном соотношении $D_{ЭС}$ является функцией концентраций C_1, C_2, C_3 , поэтому выражение (6.11) в свою очередь определяет зависимость от этих концентраций критерия $D_{СЗН}$. Подставляя в (6.11) вместо C_1, C_2, C_3 выражения (6.8)-(6.10) получим обобщенный критерий качества здоровья как функцию затрат финансовых средств, предназначенных на оздоровление атмосферы в регионе $D_{СЗН}(z_1, z_2, z_3)$.

Положим, что базовой целью природоохранной, оздоровительной политики является снижение заболеваемости населения города болезнями, связанными с загрязнением атмосферного воздуха, путем оптимального распределения бюджета города, предназначенного на борьбу с этими загрязнениями.

В этом случае задачу оптимизации природоохранного бюджета сформулируем следующим образом:

$$(z_1, z_2, z_3)_{opt} = \arg \max_{z_1, z_2, z_3} D_{СЗН} \quad (6.12)$$

где на z_1, z_2, z_3 наложено ограничение (6.7).

Решение поставленной задачи оптимизации находилось методом случайного поиска. С помощью генератора равномерно распределенных случайных чисел в интервале от 0 до Z выбирались случайные значения z_1, z_2, z_3 , затем оценивалось выполнение ограничения (6.7). Если абсолютное значение невязки $\sum_{i=1}^3 z_i - Z$ не превышало 10% от Z ,

из выражений (6.1) – (6.10) определялись концентрации веществ в воздухе и из выражения (6.2) рассчитывался аддитивный критерий качества атмосферного воздуха $D_{ЭС}$. Далее из (6.21) определялся аддитивный глобальный критерий состояния здоровья населения $D_{СЗН}$.

По описанной схеме была проведена достаточно большая серия расчетов, в результате чего был получен массив значений критериев $D_{СЗН}$. Из массива выбиралось максимальное значение $D_{СЗН}$ и определяющие его значения z_1, z_2, z_3 полагались решением поставленной задачи оптимизации.

На рис. 6.2 показан фрагмент интерфейса разработанного программного обеспечения, предназначенного для оптимизации распределения бюджета, направляемого на очищение атмосферного воздуха по отдельным видам загрязнений, а также для вычисления значений глобальных критериев качества ЭС и СЗН, которых можно добиться при оптимальном использовании бюджета.

Результаты процедуры оптимизации

Ваш бюджет: 17438

Распределение бюджета

Сероуглерод	9599
Сероводород	5558
Сернистый_ангидрид	2281

Значения глобальных критериев загрязненности

Макс. пессимизма	Мультипликативный	Аддитивный
0.17	0.16	0.65

Аддитивный глобальный критерий СЗН

0.84

Закреть

Рис. 6.2. Фрагмент интерфейса, представляющий решение задачи оптимизации.

Как видно из рисунка, при оптимальном использовании бюджета можно получить достаточно высокие значения аддитивных глобальных критериев качества ЭС и СЗН.

На рис. 6.3 приведен график рассчитанных значений глобальных критериев качества СЗН и ЭС в зависимости от размеров бюджета. Из рисунка видно, что если не вкладывать деньги в очистные мероприятия по охране воздушного бассейна города, то заболеваемость хроническими бронхитами, гастритами и атопическими дерматитами будет иметь предельно высокий уровень, соответствующий наиболее низкому значению глобального критерия качества здоровья ($D_{СЗН} = 0.05$). При увеличении финансирования от нуля до 17000 рублей происходит постоянное улучшение состояния ЭС и СЗН. Финансирование свыше 17000 рублей фактически не приводит к дальнейшему улучшению экологического состояния здоровья населения, так как сумма в 17000 рублей оказывается достаточной для практически полного прекращения выбросов сероуглерода, сероводорода и сернистого ангидрида существующими источниками загрязнений.

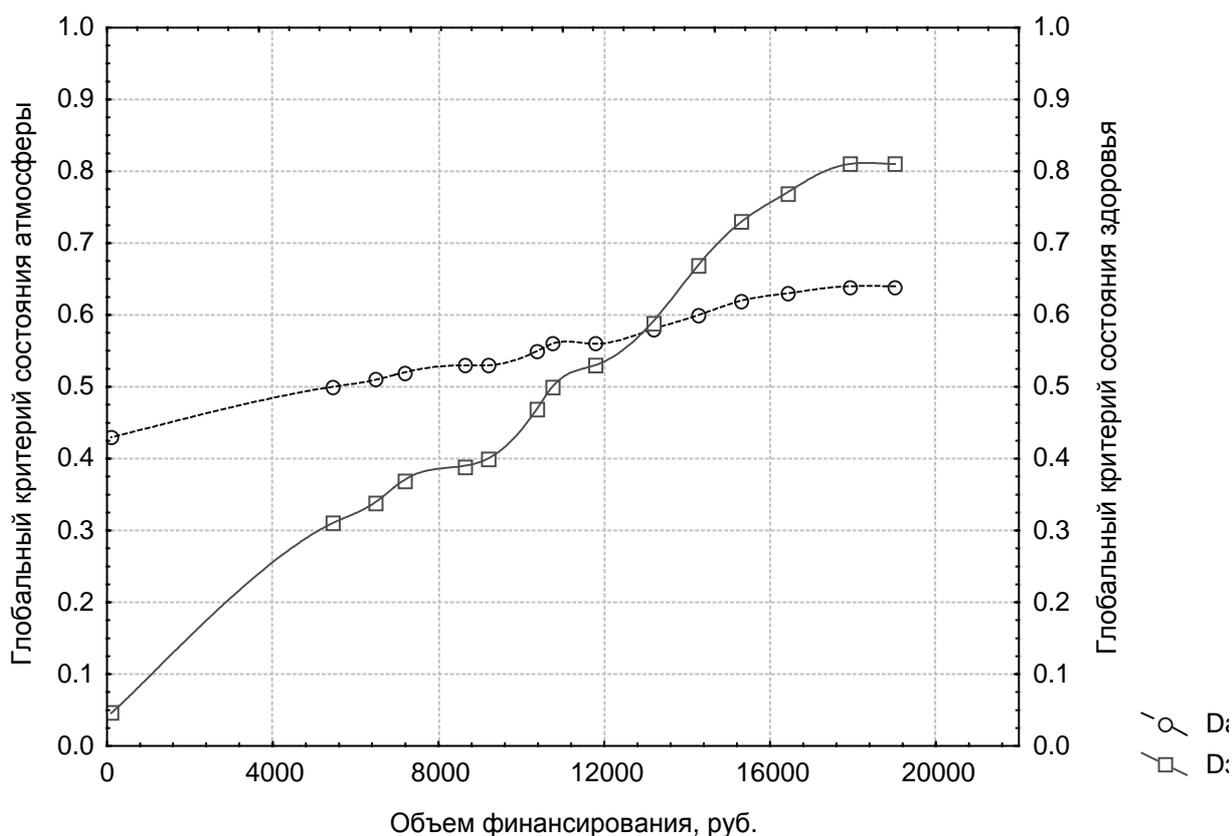


Рис. 6.3. Зависимость глобальных критериев качества СЗН и ЭС от объема финансирования.

Разработанная методика многокритериальной оценки экологического состояния для принятия оптимальных управленческих решений и реализующее ее программное

обеспечение официально утверждены Министерством Здравоохранения Республики Беларусь [126].

Г л а в а 7.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Экономика является, вероятно, наиболее благодатной сферой приложения современных математических методов оперирования с неопределенностями. Действительно, если исключить чисто бухгалтерский анализ, когда мы имеем дело с уже совершившимися событиями, главными проблемами экономической науки остаются планирование и прогнозирование. Решение этих задач без анализа рисков, связанных с неопределенностью будущего, может в настоящее время представлять лишь некоторый академический интерес для представителей чистой математики. С другой стороны, оценка рисков с помощью только теоретико-вероятностного подхода возможна лишь при прогнозировании весьма близкого будущего, когда существующие в настоящий момент тренды еще имеют место. Для более отдаленных горизонтов планирования, характерных, например, для разработки бизнес-планов инвестиций в реальные активы (*capital budgeting*), как правило, не имеется информации, достаточной для построения необходимых частотных распределений. В таких ситуациях разработчики бизнес-планов используют экспертные оценки и другую информацию, характеризующуюся неопределенностями субъективной природы. Источником субъективной неопределенности служит также многокритериальность, внутренне присущая экономическим оценкам. В этих условиях решение экономических задач требует использования соответствующего математического аппарата, в частности, теории нечетких множеств и интервальной математики. Потребность в работах этого направления отражается в лавинообразном росте числа публикаций в области приложений "Soft Computing" для решения экономических проблем, в появлении специализированного международного журнала "Fuzzy Economic Review".

Материалы настоящей главы основаны, главным образом, на оригинальных публикациях авторов [128 -131, 293, 117, 44, 46, 199, 200, 40, 31, 35, 37]

7.1. Разработка методики многокритериальной оценки качества коммерческих контрактов

В настоящее время все большее значение принимает достижение высокого качества не только продукции и услуг, но и любой деятельности, прямо или косвенно определяющей эффективность работы предприятия. При этом наличие системы оценки качества

заключаемых контрактов является необходимым условием при сертификации заводских систем управления качеством, производимой специализированными зарубежными фирмами. При этом отсутствуют стандартные методы оценки качества продукции и контрактов, которые рассматривали бы все многообразие факторов, влияющих на качество. Например, существуют рекомендации стандарта ИСО-9000, регламентирующие, какие факторы следует учитывать при оценке качества контрактов, но не указывающие, каким образом следует проводить оценку.

7.1.1. Основные проблемы оценки качества контрактов

Важной сферой деятельности управленческого персонала предприятий является сбыт готовой продукции. В сбытовой системе концентрируется конечный результат всей деятельности предприятия. Поэтому важно правильно организовать эту систему, использовать передовые методы и технологии для повышения эффективности ее функционирования.

Сбыт средств производства отличается от сбыта потребительских товаров и характеризуется относительно небольшим числом осведомленных потребителей, тесными отношениями предприятий-производителей и потребителей, непосредственной формой сделки и ценообразованием с фиксированной нормой прибыли [27, 79].

Сбытовая деятельность предприятия состоит из следующих основных этапов

- подготовка сделки;
- заключение контракта;
- исполнение принятых обязательств.

Перед заключением сделки проводится большая подготовительная работа, требующая участия специалистов с высокой квалификацией. Подготовка заключается в изучении вопросов общего характера, связанных с конкретной сферой торговли и информации, относящейся к предмету сделки. При этом важную роль играет специфика сбытовой деятельности.

Так, предприятиям, ведущим торговую деятельность с зарубежными партнерами, необходима следующая информация:

- состояние и перспективы развития национальной экономики;
- состояние и перспективы развития отрасли;
- положение фирмы на рынке;
- торгово-промышленные условия и обычаи страны партнера;
- правовые условия торговли;

- уровень цен.

Установлению договорных отношений предшествует преддоговорной период, в течение которого ведутся переговоры о предстоящей сделке и согласовываются ее основные условия. В это время стороны стараются согласовать как можно больше уточняющих условий, придать им конкретный и точный смысл. Согласование условий ведется до тех пор, пока не будет достигнута договоренность по всем условиям контракта [137, 6, 106, 29].

На этом этапе осуществляется анализ заключаемых контрактов. Изучается информация по всем основным разделам контракта:

- срок и дата поставки;
- качество товара;
- цена товара;
- базисные условия поставки;
- рекламации;
- штрафные санкции и порядок возмещения убытков;
- страхование;
- арбитраж.

Далее работниками коммерческого отдела строится причинно-следственная диаграмма, отражающая взаимосвязи выделенных факторов и производится оценка этих факторов.

Срок и дата поставки рассматриваются, исходя из возможностей предприятия производить необходимое количество товара оговоренного качества к заданному сроку. Под сроком подразумевается некоторый период времени после заключения контракта. Дата – конкретное число, на которое должна быть поставлена продукция.

Требования к качеству в настоящее время играют определяющую роль. Вследствие поставки товара низкого качества покупатель может подавать рекламации, требовать уменьшения цены или вовсе расторгнуть сделку, с соответствующими негативными последствиями для экономического положения продавца и его деловой репутации. Требования к качеству могут устанавливаться в соответствии с ГОСТ, ТУ или ISO-9000.

Анализ цены товара включает определение базиса цены, а также внесение различных коммерческих поправок и использование системы скидок. Поправки и скидки могут составлять до 30% от первоначальной цены контракта [80, 2].

При анализе коммерческих поправок особое внимание уделяется временному фактору, так как обычно между датой заключения контракта и датой поставки лежит

большой промежуток времени. Предпочтение здесь оказывается скользящим ценам, позволяющим продавцу покрыть все затраты, возникающие в процессе выполнения контракта [55, 8].

Базисные условия поставки определяют обязанности контрагентов по доставке товара и устанавливают момент перехода риска случайной гибели или порчи товара с продавца на покупателя. Эти условия используются потому, что в процессе исполнения сделок транспортировка товаров предполагает значительные расходы одной из сторон и во многом определяет базис цен на товары [2].

При исследовании рекламаций рассматриваются условия и сроки их подачи. Анализ штрафных санкций касается условий наступления санкций, размера и вида этих санкций, а также сроков их наступления. Рассмотрение порядка возмещения убытков затрагивает вопросы определения виновности одной из сторон в причинении убытка, определения размера убытка и способа его возмещения. Исследование раздела «Страхование» проводится путем рассмотрения обязанностей по страхованию, условий страхования, размера страхового взноса и страховой компенсации [78]. При анализе условий арбитража рассматриваются условия подачи исков, а также законодательное право, применяемое к данному контракту [109, 138].

Часто при принятии решения необходимо делать выбор между несколькими вариантами контракта. Оценка качества основных статей контракта происходит путем определения значений соответствующих показателей качества Q_i [149]. Эти показатели служат для количественной характеристики степени выполнения требований, предъявляемых к выделенным факторам, и определяются следующим образом: $Q_i = 5$, если требования к i -му фактору выполнены очень хорошо; $Q_i = 4$ – требования к i -му фактору выполнены хорошо; $Q_i = 3$ – требования к i -му фактору выполнены удовлетворительно; $Q_i = 2$ – требования к i -му фактору выполнены недостаточно; $Q_i = 1$ – требования к i -му фактору выполнены неудовлетворительно. На основе этой шкалы оценок может быть охарактеризована степень выполнения каждого отдельного требования путем назначения соответствующей оценки.

Каждый вариант решения может отличаться от других своими характеристиками в лучшую или худшую сторону. Выбор варианта в качестве наилучшего решения, зависит от того, являются ли все факторы системы равноправными, или их значимость различна. В первом случае выбор наилучшего решения производится простым суммированием оценок, во втором - берется взвешенная сумма. Весовой коэффициент G_i в первом приближении может

быть определен следующим образом: $G_i = 5$, если i -ый фактор системы имеет очень большое значение, ..., $G_i = 1$, если i -ый фактор системы имеет несущественное значение.

Обычно на практике пользуются вторым вариантом оценки, поскольку выбранные для анализа факторы оказывают разное влияние на качество контракта. Следует отметить, что во всех случаях назначение оценок и задание весовых коэффициентов зависит от субъективной точки зрения эксперта. Поэтому последний должен всегда тщательно избегать слишком оптимистических оценок.

В результате рассмотрения и анализа информации по вышеперечисленным условиям контракта с применением метода балльных оценок принимается решение о целесообразности и выгоды заключения этого контракта для предприятия, а также выносятся предложения по пересмотру неудовлетворительных для предприятия условиях контракта.

При этом необходимо отметить, что при оценке качества контрактов по существующим базовым методикам возникают значительные трудности, так как применяемые методики имеют ряд существенных недостатков. Хотя оценка контрактов проводится квалифицированными и компетентными специалистами, часто им бывает сложно определить наиболее выгодные условия, так как они опираются исключительно на собственную интуицию. По причине субъективизма оценок нет уверенности в том, что заключается договор с оптимальными для предприятия условиями.

Обычно методики позволяют произвести оценку только одного уровня факторов, что не всегда достаточно для принятия рационального решения при заключении контракта. Зачастую модель исходных данных намного сложнее, содержит большое количество факторов одного, а иногда и нескольких уровней. При этом возникают серьезные проблемы при определении весовых коэффициентов, поскольку при большом количестве оцениваемых факторов эксперту сложно выделить наиболее значимые из всей их совокупности и адекватно ранжировать их.

Как правило, наилучший вариант выбирается при этом по наибольшей сумме оценок по всем факторам, что не всегда верно. В этом случае возможен вариант, когда фактор с наибольшим весом получит максимальную оценку, и за счет этого вариант будет принят, даже если все остальные факторы с меньшими весами имеют очень низкие оценки. Наконец, методики не показывают, насколько высоко качество оцениваемого контракта по сравнению с «идеальным контрактом» (100% качество).

Следует также отметить, что процесс оценки характеризуется совокупностью частных критериев, часто находящихся во взаимном противоречии друг с другом, когда улучшение по одному из показателей ведет к ухудшению по другому. Кроме того, критерии и ограничения на практике часто задаются на вербальном уровне в форме нечетких утверждений весьма общего характера, что дополнительно вносит существенную неопределенность в решаемую задачу.

7.1.2. Методики многокритериальной и многоуровневой оценки качества контрактов в условиях неопределенности

Рассмотрим конкретный пример разработки методики многокритериальной и многоуровневой оценки качества контрактов в условиях неопределенности. Для решения задачи построим причинно-следственную диаграмму, предложенную японским ученым Каору Исикава [51]. На ее основе выявим структуру проблемы и определим базовые взаимосвязи между основными и второстепенными факторами.

В первую очередь определим результат деятельности. В рассматриваемом случае это качество заключаемого контракта.

Будем считать, что контракт характеризуется совокупностью из следующих факторов:

- предмет договора;
- характеристика сторон;
- расценки и сумма договора;
- условия платежа;
- срок и дата поставки;
- базисные условия поставки;
- упаковка и маркировка;
- качество товара;
- порядок выполнения контракта;
- арбитраж;
- рекламации;
- санкции;
- форс-мажор;
- прочие условия;
- юридические адреса сторон.

Для определенности дальнейшее рассмотрение методики будем проводить на примере ее использования для оценки контрактов в коммерческом отделе Могилевского металлургического завода (Беларусь). Продукция Могилевского металлургического завода пользуется довольно высоким спросом в странах СНГ и Западной Европы. Предприятие заключает большое количество договоров как с потребителями на отечественном рынке, так и с зарубежными покупателями. В процессе заключения договоров происходит обсуждение поставщиком и покупателем различных условий контракта. Естественно, руководство завода заинтересовано в том, чтобы добиваться максимально выгодных для предприятия контрактов.

На основе учета специфики деятельности завода работниками коммерческого отдела был проведен «мозговой штурм». Для определения первостепенных и второстепенных факторов в качестве наиболее существенных факторов выше перечисленного перечня были выделены следующие:

- сумма договора;
- условия поставки;
- условия платежа;
- качество товара;
- санкции.

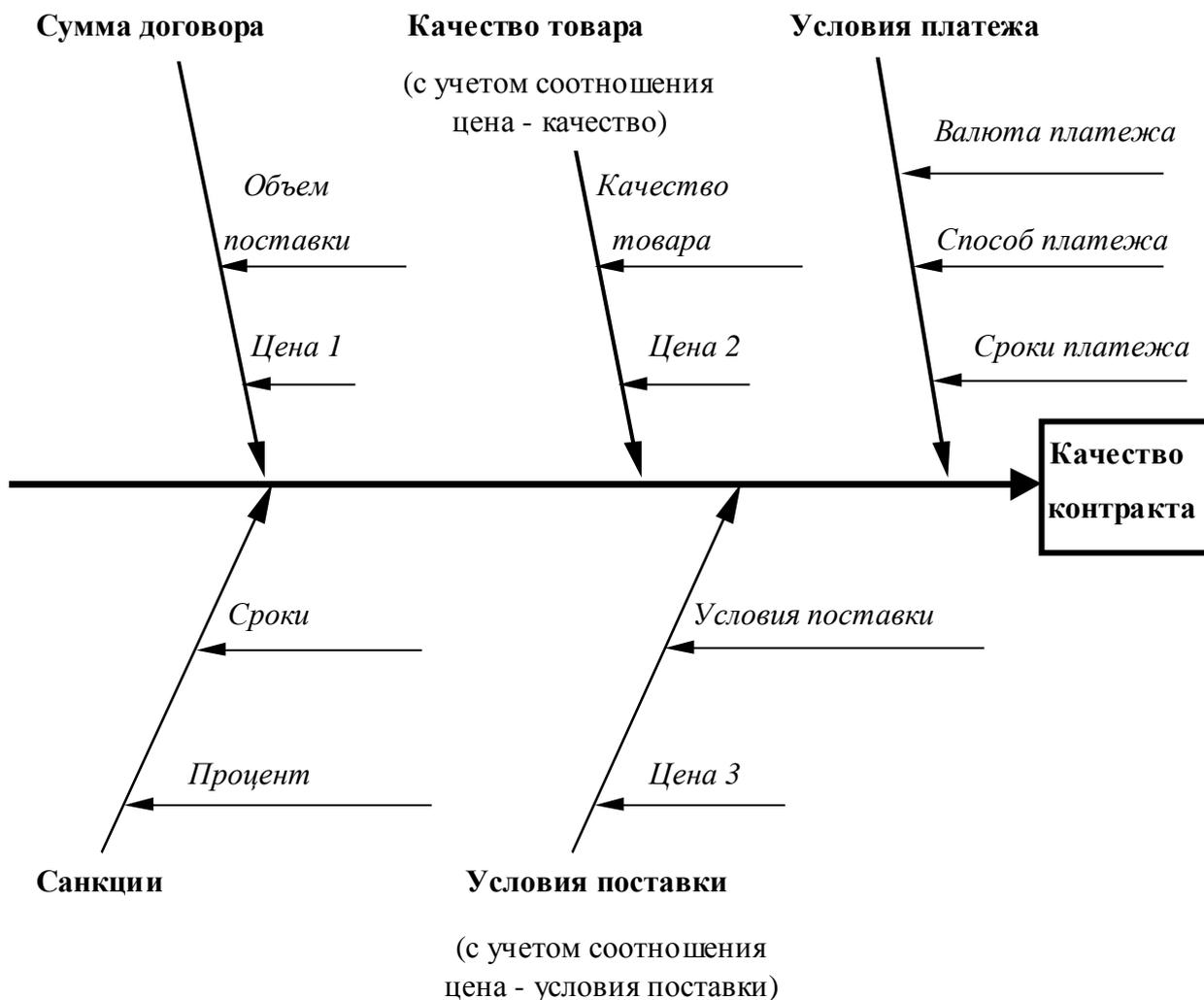
В свою очередь, для каждого первостепенного фактора далее были выделены факторы второго порядка, определяющим образом влияющие на факторы первого порядка:

- для суммы договора: объем поставки и цена;
- для условий поставки: базисные условия поставки и цена;
- для условий платежа: способ платежа, валюта платежа и сроки платежа;
- для качества товара: качество и цена;
- для санкций: сроки наступления санкций и проценты.

В соответствии с определенными факторами построена причинно-следственная диаграмма, представленная на рис. 7.1. Из диаграммы видна структурная взаимосвязь основных и второстепенных факторов, определяющих условия контракта, и их воздействие на конечный результат.

Математическая формализация факторов проводилась с использованием функций желательности. Функции желательности для факторов строились с учетом ограничений, налагаемых экономическими условиями или продиктованными соображениями финансовой выгоды [67].

Рассмотрим для примера формализованное описание показателя для фактора «Объем поставки» существуют ограничения на минимальный (продиктованный соображениями экономической выгоды) и максимальный (из-за ограниченности производственной мощности) объем. Кроме того, существует наиболее желательный объем партии. С учетом этого функция желательности конструировалась в форме представленной на рис. 7.2.



Цена 1, Цена 2, Цена 3 – цена единицы продукции, определяемая объемом поставки, качеством и условиями поставки соответственно

Рис. 7.1. Причинно-следственная диаграмма

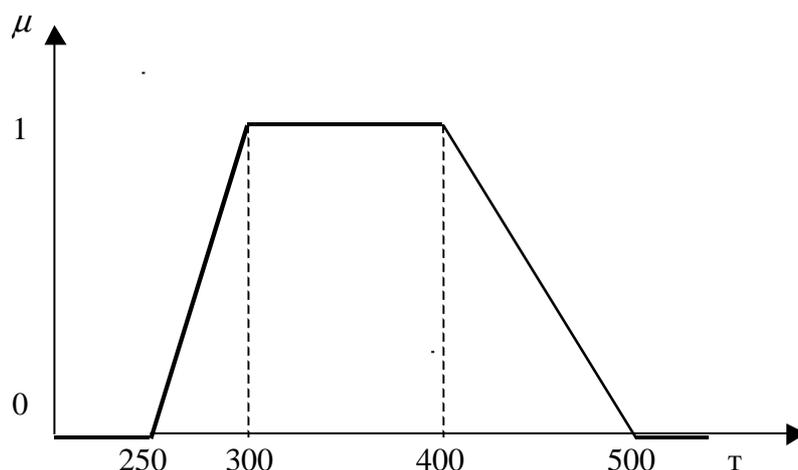


Рис. 7.2. Функция желательности для фактора «Объем поставки»

Для фактора «Цена 1» функция желательности построена в следующем виде (рис. 7.3.). Эта форма зависимости обусловлена ограничением по минимальной стоимости продукции.

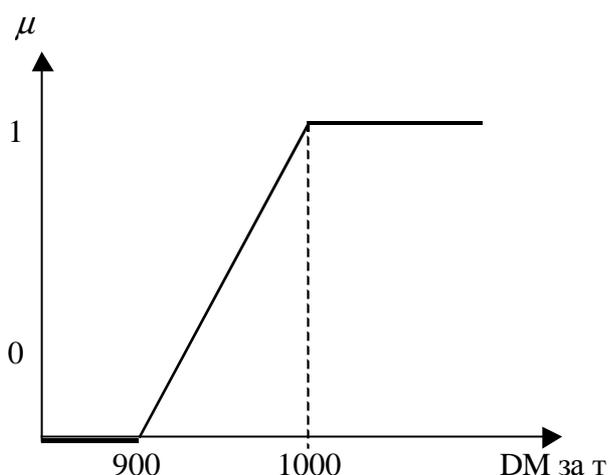


Рис. 7.3. Функция желательности для фактора «Цена 1»

Для фактора «Условия поставки» функция желательности сконструирована на основе восьми опорных точек: EXW, FAS, FCA, CPT, CIP, DAF, DDU, DDP. Опорные точки условий поставки перечислены в порядке возрастания расходов и ответственности продавца. Если при условии EXW продавец только предоставляет товар в распоряжение покупателя в своем помещении (условие самовывоза), то при условии DDP продавец поставляет товар в пункт назначения покупателя с оформлением всех документов, оплатой расходов на перевозку, страхование, уплатой таможенных пошлин и сборов. Здесь информация носит

дискретный характер, поэтому функция представляется в виде таблицы 7.1, где указаны значения функции желательности для каждого условия поставки.

Для фактора «Цена 3» принято, что функция желательности принимает обратные значения, поскольку при условии поставки EXW цена минимальна, а при условии DDP – максимальна. Значения этой функции также представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1. Функции желательности μ для «Условий поставки» и «Цены 3»

Условия поставки	EXW	FAS	FCA	CPT	CIP	DAF	DDU	DDP
Значения μ для «Условий поставки»	1	0.9	0.8	0.6	0.5	0.3	0.2	0.1
Значения μ для «Цены 3»	0.1	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9	1

Для фактора «Качество товара» выделены следующие опорные точки: соответствие качества продукции ГОСТам, соответствие качества продукции ТУ, соответствие качества продукции стандарту ISO-9000. При этом учтено, что затраты на производство продукции высокого качества требуют больших затрат на наладку оборудования, на входной контроль качества сырья и выходной контроль качества готовой продукции. Этим объясняется вид функции, представленной в таблице 7.2.

Функция желательности для фактора «Цена 2» принимает обратный вид, так как за рубежом качество на уровне ГОСТ и ТУ рассматривается как некондиция и продается по низким ценам. Исходя из затрат на производство продукции и цен была построена функция желательности, также представленная в таблице 7.2:

Таблица 7.2 Функции желательности μ для «Качества товара» и «Цены 2»

Уровень качества	ГОСТ	ТУ	ISO-9000
Значения μ для «Качества товара»	1	0.9	0.3
Значения μ для «Цены 2»	0.4	0.5	1

Для фактора «Процент санкций» с точки зрения продавца строится функция желательности, представленная на рис.7.4. Ее вид объясняется тем, что продавец заинтересован в минимальном размере выставляемых на него санкций.

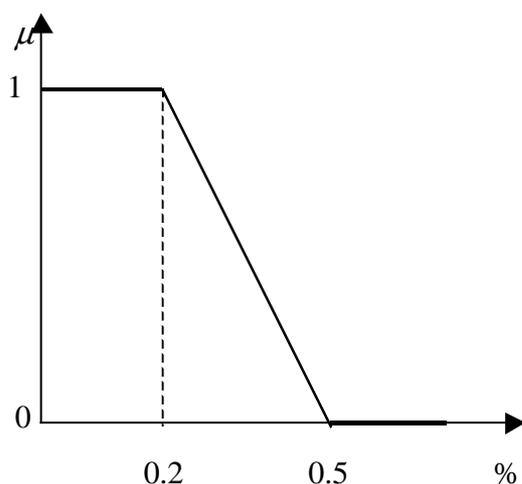


Рис. 7.4. Функция желательности для фактора «Процент санкций»

Для фактора «Срок наступления санкций» функция принимает вид, представленный на рис. 7.5.. Форма такой функции означает, что для продавца выгодно, чтобы санкции за несвоевременную поставку продукции наступали как можно позже, так как возможны непредвиденные задержки при отгрузке продукции.

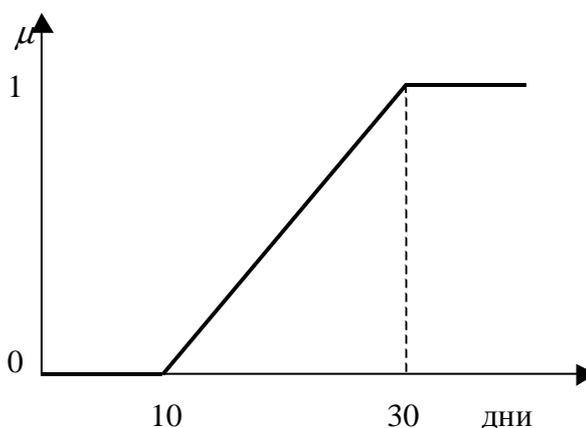


Рис. 7.5. Функция желательности для фактора «Срок наступления санкций»

Для фактора «Валюта платежа» значения функции желательности представлены в таблице 7.3.. При ее построении учтено, что чем легче конвертируется валюта, тем она выгоднее для продавца.

Таблица 7.3. Функция желательности μ для фактора «Валюта платежа»

Валюта платежа	Рубль	DM	USD
----------------	-------	----	-----

Значения μ	0.3	0.8	1
----------------	-----	-----	---

Для фактора «Способ оплаты» значения функции желательности представлены в таблице 7.4. Желательность того или иного способа зависит от срока оплаты и надежности способа оплаты.

Таблица 7.4. Функция желательности μ для фактора «Способ оплаты»

Способ платежа	Аккредитив	Инкассо	Вексель	Банковский перевод	Чек
Значение μ	1	0.8	0.5	0.4	0.3

Для фактора «Срок платежа» функция желательности принимает вид, представленный на рис. 7.6. Чем раньше поступит оплата, тем лучше для продавца.

Таким образом, после содержательного обсуждения проблем качества контрактов были построены модели для всех факторов, являющиеся исходными для проведения дальнейшего анализа.

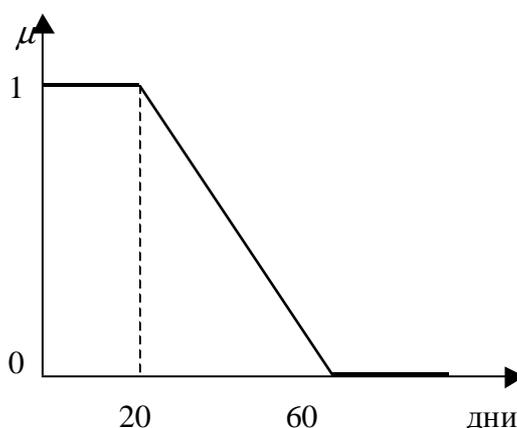


Рис. 7.6. Функция желательности для фактора «Срок платежа»

Для проведения анализа информации, связанной с причинно-следственной диаграммой и функциями желательности, следует применить специфические методы, позволяющие определять степень влияния фактора на результат. При этом следует учитывать, что при наличии всего лишь двух критериев в решаемой задаче неизбежно возникают субъективные факторы, связанные с ранжированием критериев. Подобные трудности могут быть легко устранены путем упрощения постановки задачи. Проблемы

ранжирования могут быть исключены путем изменения постановки задачи. Например, можно выделить какой-либо один главный критерий качества, а остальные рассматривать как ограничения. Другой путь – использование метода последовательных уступок. Однако, такие подходы сильно искажают исходную постановку задачи, что может приводить к существенным погрешностям результатов [72].

В рассматриваемой методике ранжирование проводится на основе определения коэффициентов относительной важности (рангов) частных критериев с точки зрения их вклада в показатель качества, который формируются на более высоком уровне причинно-следственной диаграммы. Например, показатель качества первого уровня «Условия платежа» определяется частными критериями факторов второго уровня «Способ платежа», «Валюта платежа», «Срок платежа», каждый из которых вносит разный вклад в формирование показателя качества «Условия платежа».

При проведении «мозгового штурма» эксперты коммерческого отдела провели попарное сравнение важности факторов первого и второго уровней (рис. 7.1) между собой и заполнили матрицы парных сравнений. Результаты сравнений приведены в таблицах 7.5 – 7.9. В последних колонках таблиц приведены значения рангов (критериев относительной важности), полученные в результате расчетов, проведенных с помощью разработанной методики, описанной в главе 2.

Таблица 7.5. Матрица парных сравнений и ранги факторов, входящих в «Сумму договора»

	Объем поставки	Цена	Ранг
Объем поставки	1	1/5	0.311
Цена	5	1	1.689

Таблица 7.6. Матрица парных сравнений и ранги факторов, входящих в «Качество товара»

	Качество	Цена	Ранг
Качество	1	1/3	0.497
Цена	3	1	1.503

Таблица 7.7. Матрица парных сравнений и ранги факторов, входящих в «Санкции»

	Процент санкций	Срок предъявления	Ранг
Процент санкций	1	3	1.497
Срок предъявления	1/3	1	0.503

Таблица 7.8. Матрица парных сравнений и ранги факторов, входящих в «Условия поставки»

	Базисные условия	Цена	Ранг
Базисные условия	1	3	1.497
Цена	1/3	1	0.503

Таблица 7.9. Матрица парных сравнений и ранги факторов, входящих в «Условия платежа»

	Способ платежа	Валюта	Срок платежа	Ранг
Способ платежа	1	5	3	1.986
Валюта	1/5	1	1/3	0.305
Срок платежа	1/3	3	1	0.709

Далее, аналогичным образом была построена матрица парных сравнений для основных факторов первого уровня и были рассчитаны их ранги. Эти данные приведены в таблица 7.10.

Таблица 7.10. Матрица парных сравнений и ранги основных разделов контракта

	Сумма договора	Качество товара	Санкции	Условия поставки	Условия платежа	Ранги
Сумма договора	1	3	7	1/3	1/4	0.652
Качество товара	1/3	1	3	1/5	1/5	0.371
Санкции	1/7	1/3	1	1/4	1/5	0.277
Условия поставки	3	5	4	1	1/3	1.102
Условия платежа	4	3	5	3	1	2.598

На последнем этапе проводится (с учетом найденных рангов) свертывание частных критериев первого и второго уровня в единый глобальный критерий, характеризующий общее качество контракта.

В таблице 7.11 приведены в качестве примера исходные данные для факторов второго уровня для трех конкретных контрактов. В ней же также приведены соответствующие им значения построенных выше функций желательности.

Таблица 7.11. Значения факторов второго уровня и соответствующих функций желательности

	Контракт А	Контракт Б	Контракт В

Фактор	Значение	μ	Значение	μ	Значение	μ
Объем поставки, т	350	1	275	0.5	480	0.2
Цена 1 за тонну, DM	980	0.8	1000	1	930	0.3
Качество товара (соответствие уровню)	ТУ	0.9	ГОСТ	1	ISO	0.3
Цена 2 (соответственно уровню качества товара)	ТУ	0.5	ГОСТ	0.4	ISO	1
Процент санкций	0.2	1	0.3	0.6	0.4	0.2
Срок наступления санкций, дней	30	1	20	0.5	12	0.2
Условия поставки	CIP	0.5	FCA	0.8	CPT	0.6
Цена 3 (соответственно условиям поставки)	CIP	0.6	FCA	0.4	CPT	0.5
Способ платежа	Инкассо	0.8	Аккредитив	1	Вексель	0.5
Валюта платежа	DM	0.8	Бел. рубль	0.3	СКВ	1
Срок платежа, дней	30	0.75	40	0.5	50	0.25

Результаты свертывания частных критериев второго уровня в оценке основных разделов контрактов *A*, *B* и *B* приведены в таблице 7.12. Расчеты проведены по разработанной во второй главе методике для двух различных глобальных критериев (min-свертки D_1 и аддитивного D_2 , подробно описанных в главе 1) на основе численных значений критериев (таблица 7.11) и их рангов (таблицы 7.5 ÷ 7.9).

Таблица 7.12. Глобальные критерии качества основных разделов контрактов

Раздел контракта	Контракт <i>A</i>		Контракт <i>B</i>		Контракт <i>B</i>	
	D_1	D_2	D_1	D_2	D_1	D_2
Сумма договора	0.686	0.831	0.806	0.922	0.131	0.284
Качество товара	0.349	0.599	0.252	0.549	0.550	0.826
Санкции	0.652	0.812	0.465	0.575	0.090	0.200
Условия поставки	0.351	0.528	0.631	0.700	0.465	0.575
Условия платежа	0.651	0.791	0.612	0.810	0.252	0.492

В таблице 7.13 приведены значения глобальных критериев (максимального пессимизма

D_1 и аддитивного D_2) качества контрактов A , B и B , рассчитанных по методике (глава II) с использованием данных таблиц 7.10 и 7.12.

Таблица 7.13. Глобальные критерии качества контрактов

Глобальные критерии	Контракт A	Контракт B	Контракт B
D_1	0.315	0.279	0.028
D_2	0.726	0.768	0.491

Из таблицы 7.13 видно, что в соответствии с min-критерием D_1 , оптимальным является контракт A , а в соответствии с аддитивным критерием – контракт B . При этом следует отметить, что по аддитивному критерию качества контракты A и B различаются не существенно, в то время как по min- критерию контракт A ощутимо лучше, чем B .

Построенная в задаче причинно-следственная диаграмма (рис. 7.1) по сути дела представляет собой иерархическую систему, где качество контракта – цель, большие «рыбьи кости»[51] - первый уровень, малые «рыбьи кости» - второй уровень, а контракты A , B и B – альтернативы.

Очевидно для оценки эффективности различных альтернатив — контрактов A , B , и B можно использовать и широко распространенный метод анализа иерархий Т. Saaty [116], подробно рассмотренный в главе 2.

Проведем сравнение разработанного подхода с методом анализа иерархий (МАИ).

В таблице 7.14 приведены приоритеты (по терминологии Т. Saaty) или ранги, рассчитанные методом МАИ по матрицам парных сравнений для альтернатив.

Таблица 7.14. Приоритеты альтернатив для варианта расчета по методу Т. Saaty

Фактор	Приоритеты		
	Контракт A	Контракт B	Контракт B
Объем поставки	2.00	0.69	0.28
Цена 1 за тонну	0.75	2.00	0.28
Качество товара (соответствие уровню)	0.97	1.80	0.20
Цена 2 (соответственно уровню качества товара)	0.47	0.33	2.20
Процент санкций	2.20	0.57	0.25

Срок наступления санкций	2.30	0.49	0.22
Условия поставки	0.46	2.10	0.45
Цена 3 (соответственно условиям поставки)	1.60	0.51	0.86
Способ платежа	0.90	1.80	0.34
Валюта платежа	0.96	0.24	1.80
Срок платежа	2.20	0.47	0.29

На основе МАИ были получены следующие итоговые оценки качества альтернатив: A – 0.366, B - 0.460, B – 0.176. Из полученных результатов, следует что по методу МАИ предпочтительным является вариант B . Этот вывод совпадает с нечетко-интервальной оценкой контрактов по аддитивному критерию D_2 (таблица 7.13). Как показано в главе 2, использование аддитивной свертки частных критериев на практике может приводить к абсурдным результатам, поэтому выбор контракта B как наилучшего не является надежным решением задачи. Наиболее адекватным результатом решения задачи является, очевидно, выбор в соответствии с оценками на основе min-критерия, контракта A . Поэтому использование МАИ для решения рассматриваемой проблемы представляется нецелесообразным. Кроме того следует отметить, что предложенная нечетко-интервальная методика обладает более гибкими возможностями для оценивания различных альтернатив, и в этом смысле обладает рядом преимуществами перед методом МАИ.

Так, выше было показано, что при оценке альтернатив целесообразно использовать различные типы глобальных критериев, поскольку использование только одного аддитивного критерия, который компенсирует низкие значения одних частных критериев за счет высоких значений других, может привести к неадекватным итоговым выводам. В методе Т. Саату используется только аддитивный способ свертывания. Кроме того, при расчетах по методу Т. Саату пришлось построить дополнительно 11 матриц парных сравнений размерами 3x3 на уровне альтернатив относительно второго уровня критериев. При появлении четвертой альтернативы пришлось бы заново строить 11 матриц парных сравнений размерами 4x4, а при дальнейшем увеличении количества альтернатив (в реальных ситуациях на предприятиях они могут исчисляться сотнями), построение подобных матриц представляется нереальным. Далее в случае применения метода Т. Саату пришлось численные значения факторов (объем поставки, цена за тонну и другие), перевести в качественные сравнительные оценки. При этом использовались только девять дискретных чисел, что приводит к существенной утрате информации.

Таким образом, проведенный анализ свидетельствует о преимуществах разработанного нечетко-интервального метода решения многокритериальных многоуровневых задач, по сравнению с широко распространенной методикой Т. Сааи.

7.2. Разработка методики многокритериальной оценки качества промышленной продукции

Повышение качества готовой продукции имеет ключевое значение для производителей. При этом обеспечение высокого качества требует отчетливого понимания целей управления качеством, знание структуры критериев и параметров, их определяющих. Для облегчения решения таких задач за рубежом широко применяются использованные выше причинно-следственные диаграммы Каору Исикава [51]. Построение таких диаграмм позволяет структурировать проблему, определить первостепенные и вспомогательные задачи, наметить конкретный план работ по повышению качества. Однако при этом остается неиспользованным большой объем информации, явно и неявно связанной с построенной диаграммой. Не учитываются многие количественные и качественные характеристики факторов, степень желательности их значений с точки зрения обеспечения высокого качества, не принимается во внимание неравнозначность частных критериев качества с точки зрения их вклада в формирование обобщенного показателя качества. Не рассматриваются процедуры построения количественных, хорошо интерпретируемых значений обобщенного показателя качества.

Рассмотрим методику получения многокритериальной оценки качества промышленной продукции на конкретном примере ее применения в трубоэлектросварочном цехе Могилевского металлургического завода (ММЗ).

Заводскими специалистами в области проблем качества было решено принять за результирующий показатель качества производимой продукции качество сварного шва. Затем были выделены основные факторы первого порядка, определяющие качество сварного шва: материал; оснастка; процесс сварки; оборудование; персонал. Далее для каждого из перечисленных факторов были определены факторы второго порядка. На рис. 7.7 приведена результирующая причинно-следственная диаграмма Исикавы, наглядно показывающая трехуровневую иерархическую структуру критериев, определяющих глобальный критерий – качество сварного шва.

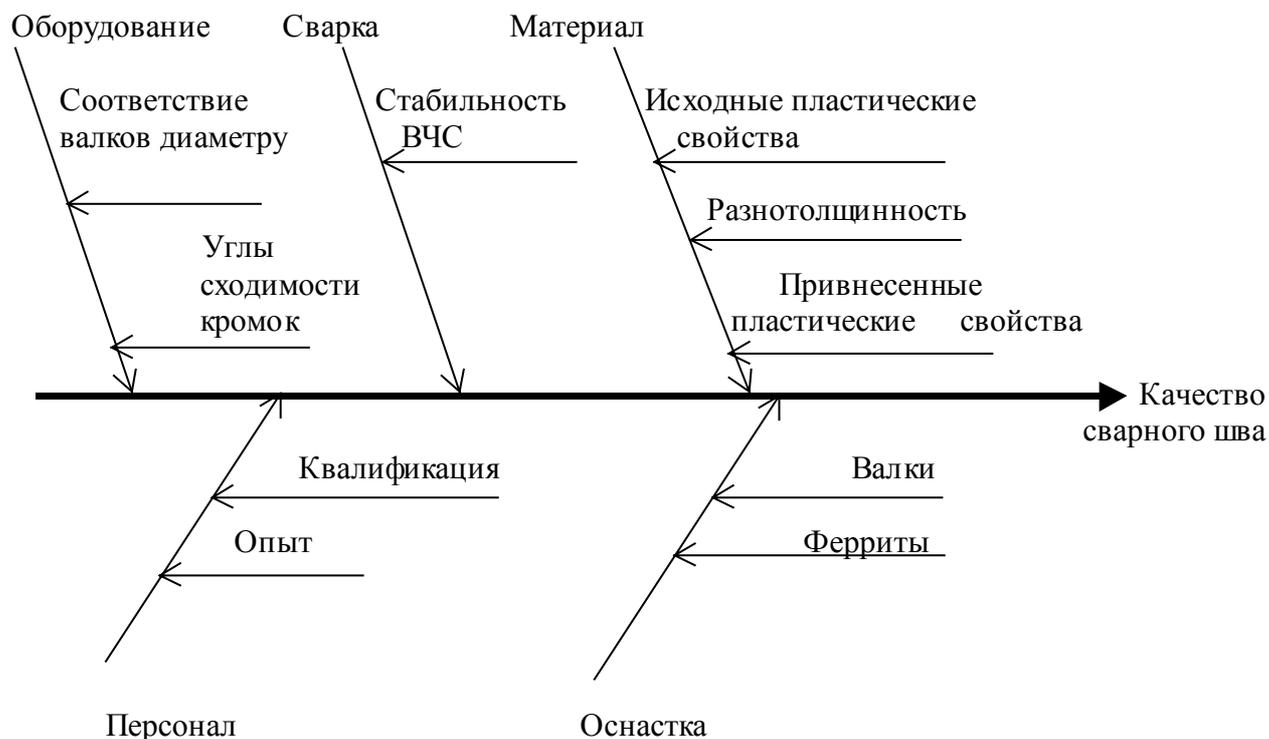


Рис. 7.7. Причинно-следственная диаграмма

Первым шагом решения задачи явилось построение функций желательности для факторов второго порядка. При их формализации были использованы следующие соображения:

Для фактора «Соответствие диаметру» считалось, что ширина штрипса должна соответствовать диаметру вала, иначе один край перекроет другой при широком штрипсе или края не сойдутся при узком. И в том, и в другом случае труба окажется бракованной. Поэтому расхождение более 0.3 мм недопустимо. С учетом этого функция желательности была определена в форме, представленной на рис. 7.8:



Рис. 7.8. Функция желательности фактора «Соответствие диаметру вала»

Фактор «Углы сходимости кромок» характеризует сдвиг краев штрипса по горизонтали при формировании трубы. При перекосе один конец трубы может разойтись, а

на втором возникнет перекрытие краев штрипса. Угол отклонения должен быть меньше 1° . В соответствии с этим функция желательности аналогична, представленной на рис.7.8.

Фактор «Стабильность высокочастотной сварки» оценивался на основе экспертных суждений. Оценка имеет качественный характер и описывается функцией желательности, представленной на рис.7.9.

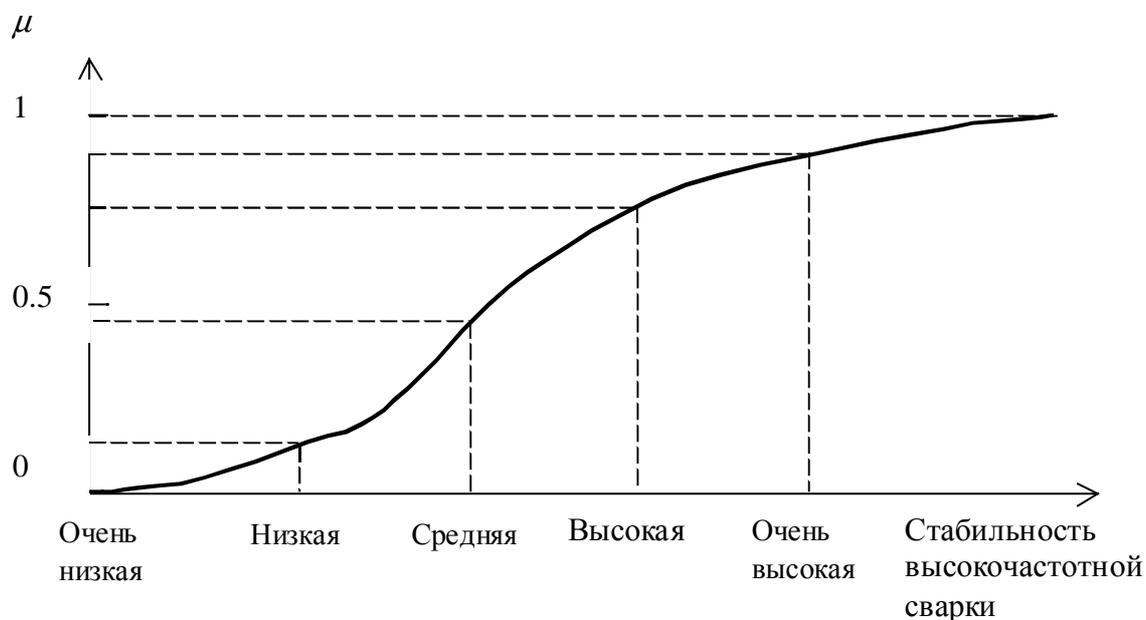


Рис. 7.9. Функция желательности фактора «Стабильность высокочастотной сварки»

При оценке фактора «Разнотолщинность» учитывалось, что сталь поставляют свернутой в валик шириной около метра. На складе эти валики режут на «штрипсы» – валики шириной около 20 см. Если толщина стали в валике разная, то края штрипса при формировании трубы плохо стыкуются, возникает «непровар» или прожог шва. Отклонения по толщине нежелательны при величине более 0.5 мм. В соответствии с этим, функция желательности аналогична, представленной на рис. 7.8.

Характеристики фактора «Исходные пластические свойства» зависят от химического состава стали. При сварке наиболее важным является соответствующее содержание углерода. Наиболее желательный интервал содержания углерода 0.69 – 0.72%. Крайние пределы – 0.67 – 0.74 %. Исходя из этих требований, соответствующая функция желательности была построена в виде (рис. 7.10):

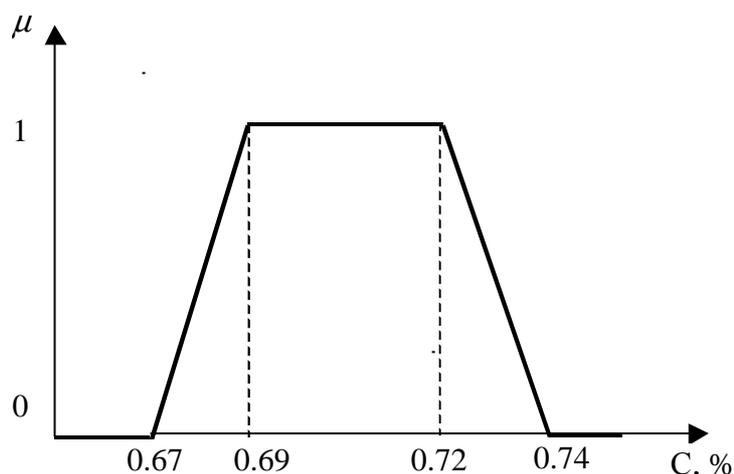


Рис. 7.10. Функция желательности фактора «Исходные пластические свойства»

Фактор «Привнесенные пластические свойства» учитывает изменения, произошедшие в области сварки. Во время сварки наиболее желательным является уровень содержания марганца 0.56 – 0.59%. Содержани марганца допустимой в границах от 0.54% до 0.61%. Исходя из этих требований, была построена функция желательности, имеющая вид, подобный представленному на рис. 7.10.

Фактор «Валки» должен обеспечивать стабильность их формы. Оценку фактора дает эксперт, пользуясь функцией желательности, подобной представленной на рис.7.9.

Фактор «Ферриты» оценивается по составу легирующих компонентов экспертами с помощью функции желательности, аналогичной рис. 7.9.

Фактор «Опыт» полагался соответствующим сроку работы. Считалось, что опыт работы на участке сварки меньший, чем два года нежелателен. Максимально опыт приобретается за пять лет. Соответствующая функция желательности критерия «Опыт» приведена на рис.7.11.

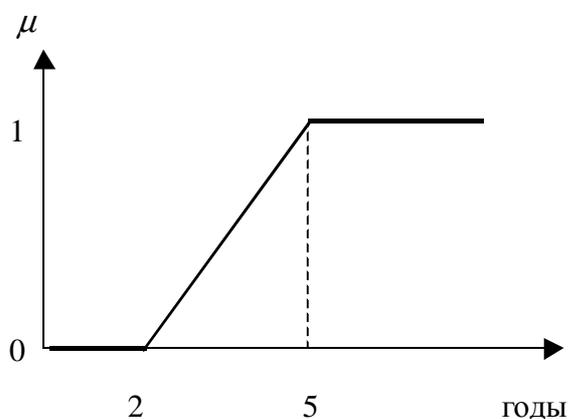


Рис. 7.11. Функция желательности фактора «Опыт персонала»

Фактор «Квалификация» соответствует разряду рабочего, начиная с третьего разряда. При том функция желательности квалификации подобна функции желательности опыта персонала.

Далее, для оценки влияния каждого фактора на результирующий показатель качества также, как и в предыдущей задаче экспертами были построены матрицы парных сравнений значимости факторов для пяти критериев первого уровня и глобального критерия высшего уровня.

В таблице 7.15 в качестве примера представлена матрица парных сравнений для фактора «Персонал». По мнению экспертов, опыт работника несколько предпочтительнее квалификации (этому соответствует число 5 шкалы оценок).

Таблица 7.15. Матрица парных сравнений факторов второго уровня, определяющих критерий первого уровня «Персонал»

	Опыт	Квалификация
Опыт	1	5
Квалификация	1/5	1

Аналогично были получены матрицы парных сравнений для остальных критериев «Оборудование», «Материал», «Оснастка».

Затем была построена матрица парных сравнений значимости факторов первого уровня (большие «рыбы кости») и определены ранги факторов. Соответствующие значения приведены в табл. 7.16.

Таблица 7.16 - Матрица парных сравнений факторов первого уровня

	Материал	Оснастка	Сварка	Оборудование	Персонал	Ранги
Материал	1	3	2	1/5	7	0.55
Оснастка	1/3	1	1/3	1/5	2	2.60
Сварка	1/2	3	1	2	8	0.62
Оборудование	5	5	1/2	1	3	0.29
Персонал	1/7	1/2	1/8	1/3	1	0.95

После расчета рангов факторов проводилась их свертка в глобальные критерии

качества на втором и первом уровнях иерархии по формулам (6.1) – (6.3).

На основе данных, полученных на исследуемом участке производственной линии, рассчитывались значения функций желательности и критерии качества всех факторов, определяющих качество сварного шва. В таблице 7.17 приведены полученные значения критериев для конкретных условий работы.

Таблица 7.17. Критерии качества факторов второго уровня

Факторы	Минимаксный критерий	Мультипликативный критерий	Аддитивный критерий
Материал	0.85	0.85	0.96
Оснастка	1	1	1
Сварка	1	1	1
Оборудование	1	1	1
Персонал	0.36	0.36	0.63

Глобальные критерии факторов второго уровня являются значениями функций желательности для критериев первого уровня. Рассчитанные на основе использования данных таблицы 7.17 глобальные критерии качества приведены в таблице 7.18.

Таблица 7.18. Глобальные критерии качества сварного шва (первый уровень)

Глобальные критерии	Значения критериев
Min-критерий	0.948
мультипликативный	0.948
аддитивный	0.978

Полученные значения критериев, представленные в таблицах 7.17 и 7.18, позволяют проанализировать уровень качества работы на участке сварки и выявить слабые места. В анализируемой ситуации видно, что для улучшения качества сварки изделий следует провести обучение персонала или заменить его более квалифицированными и опытными кадрами. Рассмотренный подход к определению качества работы производственного участка позволяет количественно определить степень улучшения показателей качества после проведенных мероприятий по совершенствованию деятельности. Количественное определение показателей качества работы отдельных участков производственной цепочки

дает возможность также следить за состоянием дел в динамике и сравнивать качество работы отдельных участков между собой.

7.3. Разработка методики многокритериальной и многоуровневой оценки социально-экономического состояния регионов

Одной из особенностей экономики переходного периода является существенная роль государства, выступающего гарантом стабильного, научно обоснованного развития процессов реформирования. Мировая практика показала, что для смягчения неизбежно возникающих негативных социальных последствий проводимых реформ во многих случаях целесообразно прямое вмешательство государственных органов в экономическую жизнь регионов, как путем выработки необходимых рекомендаций, так и посредством оказания прямой финансовой помощи из бюджетных средств. Ввиду ограниченности последних весьма актуальной становится проблема оценивания и экономически обоснованного разделения денежных ресурсов между регионами. Ниже рассмотрена методика многокритериальной оценки социально-экономического состояния регионов на примере Могилевской области (Беларусь).

Многообразие показателей в той или иной мере учитываемых при оценке социально-экономического состояния, сгруппируем в следующие блоки: промышленность, сельскохозяйственное производство, финансовый, социально-демографический и медико-экологический. Каждый блок охарактеризуем своими параметрами качества. Например, блок «Промышленность» при анализе итогов 1996 года содержал следующие параметры:

- Темпы роста объемов производства
- Темпы роста товаров народного потребления
- Удельный вес реализованной продукции
- Темпы роста численности производственно-промышленного персонала
- Темпы роста производительности труда

Приведенный список параметров оценки состояния промышленного производства в регионе не претендует на полноту и может быть изменен в зависимости от специфики региона и цели анализа. Накопленный нами опыт использования предлагаемой методики показывал, что необходимость корректировки состава учитываемых факторов начинает ощущаться на начальных этапах обработки первичных данных, получаемых из регионов. При этом выявляются показатели, которые не могут быть получены с необходимой достоверностью, факторы, не являющиеся характерными для сравниваемых регионов и пр.

Аналогичным образом формируются и анализируются списки параметров (частных критериев) в блоках «Сельскохозяйственное производство», «Финансы» и других.

Получение обобщенных оценок состояний регионов на основе столь обширной и разнокачественной информации является весьма сложной задачей и требует разработки специальных методик, позволяющих тем или иным способом агрегировать получаемую информацию по возможности без потерь и искажений.

При этом наряду с обобщенными количественными оценками экономического состояния (ЭС) в рассматриваемых регионах, построенными путем агрегирования частных критериев с учетом коэффициентов их относительной важности (рангов), представляют интерес и более детальные оценки, характеризующие, например, экономику капитального строительства или здравоохранения.

Таким образом, проблема количественной оценки ЭС является типичной многокритериальной задачей, математическая формализация и решение которой осложняются следующими обстоятельствами:

- частные критерии ЭС носят разнокачественный характер, например, задаются как абсолютными, так и относительными экономическими показателями. При этом часть критериев может быть представлена даже не в количественной форме, а виде оценок экспертов, выраженных лишь вербально (в виде утверждений типа «слабо выражена», «средне выражена», «сильно выражена» и т. д.). В этом случае неизбежно проявление неопределенности субъективной, нечеткой природы, которая не может быть адекватно интерпретирована в традиционном вероятностном смысле;
- часть критериев находятся в антагонистических отношениях, т.е. удовлетворение одним критериям ведет к неудовлетворению других;
- критерии явно неравноценны, т.е. вносят разный вклад в интегральную оценку ЭС.

Кроме того, общее число частных критериев большое. При этом, человек плохо воспринимает излишне детализированные шкалы значений признаков или критериев. Психофизические данные свидетельствуют о том, что человек уверенно различает не более 7-9 градаций на шкале некоторого признака. Если же шкала содержит большее число градаций, то соседние градации начинают сливаться и уже не могут быть с уверенностью разграничены. В итоге это приводит к тому, что значительный объем, зачастую, актуальной информации попросту исчезает из поля зрения лиц, принимающих решения, что может свести на нет усилия по сбору первичных данных и привести формированию неадекватных оценок.

Сформулированные проблемы в значительной степени разрешаются путем введения обобщенного ЭС как свертки всех частных критериев с учетом коэффициентов их относительной важности. При этом для свертки частных критериев в обобщенный их необходимо привести к общей норме (базе сравнения). Для этого будем использовать математический аппарат теории нечетких множеств, который, как показал опыт, является эффективным средством решения подобных проблем в экономике [38, 130, 131].

Положим, что задача состоит в сравнительной оценке ЭС разных районов региона. Определим для каждого показателя предельные худшие среди всех районов и наилучшие значения и будем их рассматривать как опорные точки для построения функций желательности, формализующих описание частных критериев.

Рассмотрим для примера такой важный количественный показатель, как темпы роста объемов производства в отчетном году (*ТРОП*). Пусть *ТРОП*₁ - наихудшее среди всех рассматриваемых районов региона значение показателя *ТРОП*, а *ТРОП*₂ - соответствующее наилучшее значение. Будем полагать все значения *ТРОП* ниже *ТРОП*₁ недопустимыми, все значения *ТРОП* выше *ТРОП*₂ максимально желательными. В общем случае в качестве опорных значений *ТРОП*₁, *ТРОП*₂ могут быть использованы статистические данные, полученные на основе анализа показателей всех районов или установленные нормативные показатели, если таковые имеются. Такому описанию частного критерия соответствует функция желательности, типа представленной на рис. 7.3.

Формализацию показателей, задаваемых на качественном уровне, также следует провести на основе функций желательности. При этом удобно пользоваться лингвистическими оценками степени выраженности показателя. Например, степень выраженности показателя «социальная напряженность в регионе» может быть оценена по вербальной шкале: «не выражена», «слабо выражена», «заметно выражена» и т.д. В итоге все качественные и количественные показатели могут быть представлены в единой безразмерной шкале функций желательности, определенной на интервале [0, 1].

После построения функций желательности экспертам нужно построить матрицы парных сравнений важности частных критериев для всех блоков.

В таблице 7.19 показана такая матрица для блока «Промышленность». В последней строке таблицы приведены рассчитанные с помощью методики, описанной в главе II, ранги частных критериев.

Таблица 7.19. Матрица парных сравнений и ранги для блока частных критериев «Промышленность»

	Темпы роста объемов производства	Темпы роста товаров народного потребления	Уд. вес реализованной продукции	Темпы роста численности ППП	Темпы роста производительности труда
Темпы роста объемов производства	1	1	1/7	6	6
Темпы роста товаров народного потребления	1	1	1/5	1	1
Удельный вес реализованной продукции	7	5	1	7	7
Темпы роста численности ППП	1/6	1	1/7	1	1/9
Темпы роста производительности труда	1/6	1	1/7	9	1
Коэффициенты относительной значимости критериев (ранги)	0.55	0.66	3.24	0.19	0.35

Для оценки влияния каждого из направлений деятельности региона на общую оценку ЭС была построена матрица парных сравнений важности блоков и были рассчитаны соответствующие ранги их вкладов (таблица 7.20).

Таблица 7.20. Матрица парных сравнений и ранги для оценки ЭС региона

	Промышленность	С/х производство	Финансы	Ранги
Промышленность	1	1/7	1/9	0.06
Сельское хозяйство	7	1	3	0.67
Финансы	1/3	9	1	0.27

Видно, что для рассматриваемого региона вклад сельского хозяйства является преобладающим, далее идет финансовый фактор, а роль промышленного производства незначительна.

При построении обобщенных оценок ЭС был использован аддитивный вариант свертки частных критериев (глава 2). Этот выбор способа агрегирования частных критериев в глобальные обеспечивал минимальную потерю используемой информации. В анализируемой ситуации оказалось, что почти в каждом районе встречаются отдельные

показатели, соответствующие нулевым значениям функций желательности. При этом применение сверток мультипликативной и min-свертки будет приводить к нулевым значениям глобальных критериев ЭС в этих регионах, несмотря на то, что в этих районах получены неплохие результаты по остальным показателям. Однако с использованием аддитивной свертки частных критериев на основе статистических данных, были получены взвешенные интегральные оценки ЭС, изменяющиеся от 0 до 1.

При обобщенной оценке ЭС отдельных районов в соответствии с методикой построения иерархической системы критериев, представленной в главе 2, свертка частных критериев в единый глобальный критерий проводилась поэтапно. На первой стадии с учетом рангов сворачивались частные критерии внутри подблоков, что позволило получить такие количественные оценки в районе, как интегральные показатели развития производства, финансовой сферы и пр. Полученные обобщенные оценки внутри блоков, в свою очередь, использовались со своими рангами для формирования интегральных критериев эффективности промышленности, финансовой деятельности и т. д., которые в конечном итоге сворачивались в глобальный критерий оценки ЭС района. Интегральные показатели обобщенных оценок ЭС регионов, полученные на основе описанной методики, представлены в таблице 7.21.

Таблица 7.21. Обобщенные показатели ЭС районов Могилевской области по итогам 1997 года

Район	Обобщенный критерий эффективности промышленности	Обобщенный критерий эффективности с/х	Обобщенный критерий эффективности финансовой деятельности	Глобальный критерий ЭС
Белынический	0.54	0.55	0.57	0.56
Бобруйский	0.32	0.24	0.98	0.44
Быховский	0.78	0.55	0.29	0.49
Глусский	0.33	0.14	0.30	0.19
Горецкий	0.26	0.95	-	-
Дрибинский	0.34	0.11	-	-
Кировский	0.55	0.55	0.15	0.44
Климовический	0.54	0.06	0.92	0.32
Кличевский	0.44	0.55	0.03	0.40
Костюковический	0.35	0.51	-	-
Краснопольский	0.74	0.06	-	-
Кричевский	-	0.10	1.00	-
Круглянский	0.56	0.68	-	-

Могилевский	0.16	0.61	1.00	0.60
Мстиславский	0.45	0.63	0.25	0.52
Осиповичский	0.75	0.56	0.86	0.65
Славгородский	0.35	0.63	0.13	0.48
Хотимский	0.37	0.10	-	-
Чаусский	0.27	0.05	-	-
Чериковский	0.62	0.54	-	-
Шкловский	0.85	0.66	0.77	0.70

Из таблицы 7.21 виден прикладной, конструктивный характер предложенной методики, позволяющей строить обобщенные оценки ЭС как по видам деятельности, так и по территориальным признакам. Разработанная методика является базовой. Она не накладывает ограничений на ее использование в других регионах и других сферах деятельности. В настоящее время методика внедрена и используется в практике работы Могилевского облисполкома.

7.4. Математическое моделирование и многокритериальная оптимизация финансовых параметров инвестиций в условиях нестатистической неопределенности

В большинстве существующих в настоящее время методиках оценки финансовых показателей инвестиционной деятельности принято использовать дисконтированные параметры эффективности. При этом чаще всего применяются следующие показатели: чистый приведенный доход, внутренняя норма доходности, срок окупаемости капитальных вложений, рентабельность проекта. Перечисленные показатели отражают результаты сопоставлений распределенных во времени доходов с инвестициями и затратами на производство.

Как показывают исследования, за рубежом наиболее часто используются два основных показателя: чистый приведенный доход (net present value, *NPV*) и внутренний коэффициент окупаемости (внутренняя норма доходности, внутренняя процентная ставка) (internal rate of return, *IRR*). Согласно данным опроса [171], в крупнейших нефтяных и газовых компаниях США параметр *IRR* в 69% случаев используется как основной измеритель и в 14% случаев как вспомогательный. Параметр *NPV* в 32% случаев используется как основной измеритель, и в 39% случаев - как вспомогательный измеритель. Остальные показатели в 12% случаев используются как основные и в 21% , как вспомогательные.

7.4.1. Проблемы анализа эффективности и риска инвестиций с использованием интегральных показателей

Чистый приведенный доход (*NPV*) это разность дисконтированных на один момент времени (обычно на год начала реализации проекта) показателей дохода и капиталовложений. Потоки доходов и капитальных вложений обычно представляются в виде чистого потока платежей, равного разности текущих доходов и расходов.

Чистый приведенный доход при заданной норме дисконтирования определяется зависимостью:

$$NPV = \sum_{t=t_n}^T \frac{P_t}{(1+d)^t} - \sum_{t=0}^{t_c} \frac{KV_t}{(1+d)^t}, \quad (7.1)$$

где d - величина ссудного процента, или норма дисконтирования, %; t_n - год начала производства продукции; t_c - год окончания строительства по проекту; KV_t - инвестиционные расходы (капитальные вложения) в году t , руб.; P_t - чистый поток платежей (доходов) в году t , руб.; T - время реализации инвестиционного проекта в годах.

Необходимо отметить, что приведенная зависимость (7.1) предполагает наличие совершенного рынка капитала, на котором существует единая расчетная процентная ставка. В реальной практике обычно *NPV* оценивается путем задания d , равным средней учетной банковской ставке в стране инвестора или равным другому значению, соответствующему норме прибыли при вложении капитала в другие проекты и ценные бумаги.

При оценке инвестиционных расходов наиболее важным является учет источников средств, которые использовались при выплатах (весь капитал или только заемные средства). В остальном методы расчета инвестиционных расходов почти не различаются. Для определения доходов используются существенно различающиеся схемы.

Так, в работах [147, 20, 26] рекомендуется исключить из суммы доходов амортизационные отчисления, в то время как в [64] предлагается включать не только накапливаемые амортизационные отчисления, а также и ликвидную стоимость основных производственных фондов (на последнем шаге расчета).

Такое различие вычислительных схем при расчете доходов определяется различием в отчетных документах зарубежных и российских компаний и фирм. Зарубежные компании по итогам своей деятельности за год помимо отчета о прибылях и убытках представляют отчеты об источниках и использовании фондов [113] (отчет о фондах и их использовании [76]), в

которых денежные средства накапливаются за счет чистой прибыли, амортизационных отчислений, нового акционерного капитала, кредитов и других доходов.

Определяемые таким образом фонды распределяются для выплаты дивидендов акционерам, приобретения недвижимости, машин и оборудования, увеличения оборотного капитала и т.д. При этом на расширение основных производственных фондов затрачивается средств не менее, чем получено в результате амортизационных отчислений, т.е. свободные денежные средства компании должны работать на расширение и модернизацию производства. Необходимость учета ликвидной стоимости основных производственных фондов при определении чистого приведенного дохода определяется назначением инвестиций. В случае замены оборудования, срок службы которого соответствует продолжительности расчетного периода, учет его ликвидной стоимости необходим.

Источники финансирования проектов разделяются на две основные группы:

1. Собственный капитал - средства, предоставляемые акционерами (учредителями), который должен быть увеличен в результате реализации и последующей эксплуатации исследуемого объекта.

2. Заемный капитал - кредит банков, государства, местных органов власти или других компаний, который должен быть погашен вместе с задолженностью в установленном в контракте порядке и в заданные сроки.

Результатом инвестиций, с финансовой точки зрения, является погашение кредитной задолженности и выплаты дивидендов акционерам. При этом по мере погашения кредита увеличивается стоимость акционерного капитала. Акционер, получая дивиденды за акции, в любой момент может реализовать свои акции. При условии, что деятельность предприятия при реализации данного инвестиционного проекта будет прибыльной, чем позже он продаст свои акции, тем больше выиграет. В этом случае разумно предполагать, что акционерный капитал не будет выплачен и изъят из средств предприятия. Тогда критерии оценки эффективности капитальных вложений должны быть определены только для заемного капитала и предназначены для партнеров, предоставивших этот капитал. Для акционеров основными будут при этом являться критерии эффективности акционерного капитала. Однако в ряде случаев такого рода разделение не может быть четко проведено, поскольку оно определяется целью инвестиции.

Если цель инвестиций - замена оборудования, то при расчете критериев эффективности капитальных вложений должен учитываться весь затраченный капитал. При строительстве новых объектов, срок службы которых значительно превышает расчетный

период, следует учитывать только заемные средства, а в некоторых случаях сумму заемных и собственных средств.

В соответствии с приведенными разными подходами чистый приведенный доход может иметь формально шесть различных значений для всех затраченных или только для заемных средств, с учетом или без учета амортизационных отчислений, а также с учетом ликвидной стоимости основных производственных фондов. Выбор схемы расчета чистого приведенного дохода зависит от конкретной ситуации.

Экономический смысл внутреннего коэффициента окупаемости IRR состоит в следующем. В качестве альтернативы вложения финансовых средств в инвестиционный проект рассматривается помещение тех же средств (так же распределенных во времени) под некоторый банковский процент. Распределенные во времени доходы, получаемые от реализации проекта, также помещаются на депозитный счет в банке под тот же процент. При ставке ссудного процента, равной IRR , инвестирование средств в проект даст в итоге тот же суммарный доход, что и помещение их на депозитный счет. Таким образом, при этой ставке ссудного процента обе альтернативы помещения финансовых средств экономически эквивалентны. Если реальная ставка ссудного процента меньше IRR проекта, инвестирование средств в него выгодно, и наоборот. Следовательно, IRR является граничной ставкой ссудного процента $IRR=d^*$, разделяющей эффективные и неэффективные инвестиционные проекты.

IRR находится как решение уравнения (7.1) при $NPV=0$ относительно d^* :

$$\sum_{t=t_n}^T \frac{P_t}{(1+d^*)^t} - \sum_{t=0}^{t_c} \frac{KV_t}{(1+d^*)^t} = 0. \quad (7.2)$$

Решением нелинейного уравнения (7.2) является ставка ссудного процента d^* , уравнивающая инвестиционные расходы KV_t и доходы P_t . Качественно, зависимость чистого приведенного дохода от процентной ставки представлена на рис. 7.12. В [11, 62] отмечается, что такая зависимость существует только в том случае, если имеют место изолированно осуществляемые инвестиции, то есть превышение поступлений над выплатами на протяжении всего планового периода идет только на уплату процентов по внутренней процентной ставке и на амортизацию затраченного капитала.

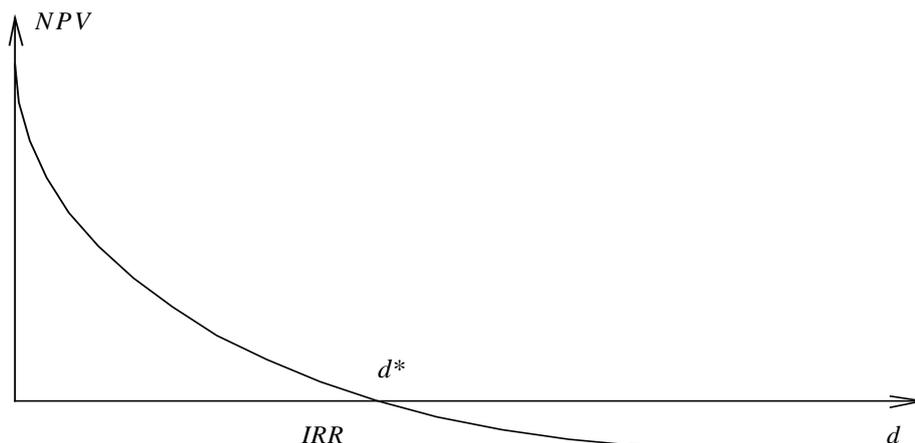


Рис. 7.12. Зависимость чистого приведенного дохода от значения процентной ставки

Последнее означает, что в плановый период капитал не реинвестируется, и внутренняя процентная ставка не зависит от процентной ставки, по которой могут быть вложены высвобожденные финансовые средства. В случае не изолированно осуществляемых инвестиций, например, при заемном характере инвестируемого капитала, возможны случаи, когда уравнение для расчета внутреннего коэффициента окупаемости будет иметь несколько решений или не иметь их вовсе.

За рубежом расчет коэффициента IRR часто применяется в качестве первого шага в финансовом анализе инвестиционного проекта. Для дальнейшего анализа отбирают те инвестиционные проекты, которые имеют IRR не ниже некоторого порогового значения (обычно не ниже 15-20% годовых).

В настоящее время традиционный подход к расчету NPV , IRR и других дисконтных параметров подвергается вполне заслуженной критике, ввиду того, что значения будущих доходов P_t , затрат KV_t и процентных ставок d - весьма неопределенные величины. При этом имеющие место неопределенности, в отличие, например, от случая прогнозирования курсов акций, не могут быть адекватно описаны в теоретико-вероятностных терминах. В реальных ситуациях инвестор или привлекаемые им эксперты в состоянии уверенно указать лишь интервалы, в пределах которых могут оказаться значения P_t , KV_t и d , и наиболее ожидаемые значения внутри этих интервалов. В итоге возникает проблема разработки адекватной методики расчета финансовых показателей проектов при наличии такого рода неопределенностей, имеющих субъективную природу. Кроме того, требует решения весьма существенная проблема оценки риска инвестиций.

В настоящее время наибольшее распространение получили методики анализа эффективности и риска инвестиций на основе теоретико-вероятностного подхода. В наиболее общем виде финансовый риск можно рассматривать как степень определенности финансовой потери, выражающейся в:

- а) возможности не достичь поставленной цели;
- б) неопределенности прогнозируемого результата;
- в) субъективности оценки прогнозируемого результата.

Возможна и другая интерпретация риска - как степени variability дохода, который может быть получен благодаря владению данным видом активов.

Существует множество подходов к количественной оценке риска, которые обычно представляют собой различные модификации анализа чувствительности конъюнктуры (Sensitivity Fnalysis) или анализа вероятностного распределения доходности (Pobability Distributions).

Например, в рамках рекомендаций Всемирного Банка по анализу инвестиций указываются три основных методики:

- анализ чувствительности, при котором исследуется влияние определенных (5%, 10% и др.) вариаций наиболее важных для проекта входных параметров (размера инвестиций, динамики доходов и расходов, нормы дисконтирования и пр.) на устойчивость оценок эффективности проекта;
- метод статистических испытаний, при котором значения недетерминированных ключевых входных параметров выбираются случайно в соответствии с известной процедурой типа Монте-Карло (при помощи генератора случайных чисел);
- метод сценариев, когда опытные эксперты прорабатывают несколько типовых вариантов развития событий по проекту соответствующих значений динамики выпуска продукции, доходов и расходов и др.

Существуют и жесткие нормативные ограничения риска с четкой формулировкой метода его расчета. Например, для банков Республики Беларусь для оценки крупных рисков введен максимальный размер риска на одного заемщика.

Следует отметить, что этот норматив по методике построения близок к концепции эмпирического риска [84]. Однако его детерминированный характер не позволяет достаточно полно учитывать неопределенность, неизбежно связанную с оценкой будущих событий. Последнее делает его малоприменимым для оценки финансового риска инвестиций.

Традиционно неопределенности, связанные с прогнозированием будущих событий в экономике, интерпретируют с теоретико-вероятностной точки зрения, что во многих практически важных случаях может приводить к неадекватным результатам.

Для того, чтобы обосновать это утверждение, а также сделать более ясной сущность предлагаемого подхода, рассмотрим некоторые наиболее распространенные методики количественной оценки инвестиционного риска. Дальнейшее рассмотрение будем вести на примере оценки чистого приведенного дохода, являющегося одним из важнейших финансовых параметров оценки эффективности инвестиций.

Суть первой методики оценки риска проекта на основе NPV заключается в исчислении размаха вариации NPV , исходя из пессимистической (п), наиболее вероятной (в) и оптимистической (о) оценок параметров, входящих в выражение (7.1). Получаемый размах вариации $R = NPV_o - NPV_n$ рассматривается как мера риска, ассоциируемого с данным инвестиционным проектом.

Необходимо отметить, что пессимистическая, наиболее вероятная и оптимистическая оценки задаются экспертами. Эти оценки носят субъективный характер и не связаны с какими-либо вероятностями классической частотной природы. Таким образом, методика носит чисто эвристический характер, и для получения адекватных результатов требует неформального анализа в каждой конкретной ситуации ввиду необходимости учета взаимного влияния пессимистических, наиболее вероятных и оптимистических оценок параметров в выражении (4.1).

Второй подход основан на экспертной оценке вероятностей появления прогнозируемых значений доходов и инвестиционных расходов. В итоге NPV рассчитывается по той же формуле (7.1) при замене P_t и KV_t на $Pp_t * P_t$ и $Pkv_t * KV_t$ соответственно, где Pp_t и Pkv_t - экспертные оценки вероятностей соответствующих доходов P_t и расходов KV_t в году t .

Этой методике присущи существенные противоречия. Смысл используемых вероятностей, например, Pp_t четко не определен. При этом считается [61], что увеличение риска проекта должно вести к снижению рассчитанных таким образом значений NPV по сравнению со значениями этого параметра, полученными без учета вероятностей. Однако разность $Pp_t * P_t$ и $Pkv_t * KV_t$ может оказаться больше разности P_t и KV_t , в случае, если вероятности доходов выше вероятности расходов. Кроме того, следует дополнительно остановиться на смысле используемых вероятностей, например, Pp_t .

Если Pp_t вероятность осуществления события, заключающегося в том, что в году t финансовые поступления составят именно P_t , то, строго говоря, с вероятностью $1 - Pp_t$ можно ожидать поступления любого другого количества денег (возможно даже очень большого), которое не определено. Это делает все проводимые оценки некорректными. В подобной ситуации произведения типа $Pp_t * P_t$ или $Pkv_t * KV_t$ не имеют содержательной вероятностной интерпретации. Иногда их называют математическим ожиданием, что не является корректным, поскольку математическое ожидание должно рассчитываться на основе полного распределения вероятности событий, что в данном подходе не определено, а не путем использования вероятности лишь одного из них.

Для иллюстрации необходимо рассмотреть несколько примеров.

Пусть для осуществления краткосрочного проекта стоимостью \$4000 найдены четыре инвестора, каждый из которых выделяет средства в размере \$1000 с вероятностью 0.8. Чтобы задача была определена, будем считать, что оставшаяся вероятность 0.2 - вероятность отказа инвестора. Таким образом имеется всего четыре события, в которых возможно получение каких-либо денег. Конечно, с вероятностью 0.0016 (не 0.008) можно ничего не получить, но существенны только события, связанные с получением денег. Рассчитываем математическое ожидание.

$$M = 4 * (0.2 * 0 + 0.8 * \$1000) = \$3200.$$

Очевидно, что эта цифра не имеет содержательного экономического смысла, поскольку в данном случае есть четыре дискретных события: с вероятностью 0.4096 будет получена вся требуемая сумма \$4000; с вероятностью 0.4096 - \$3000; с вероятностью 0.1536 - \$2000; с вероятностью 0.0256 - \$1000. В каждом из этих событий с определенной вероятностью можно получить строго фиксированные суммы, ни одна из которых не равна математическому ожиданию \$ 3200. Более того, математическое ожидание \$ 3200 в принципе не может реализоваться на практике и не отражает никакой, даже вероятностной реальности. Поэтому оно является бессмысленной математической абстрацией. Отметим, что лингвистически термин “математическое ожидание” соответствует наиболее ожидаемому, т.е. наиболее вероятному событию. В нашем случае математическое ожидание \$ 3200 не является наиболее вероятным событием, более того оно является событием невозможным.

Другой пример. Пусть на основе кредитной истории клиента банка установлено, что вероятность (в строго частотном, а не в субъективном смысле) возврата им ссуды в установленный срок равна 0.8. Пусть клиенту выдана ссуда \$200.

Математическое ожидание равно \$160. Очевидно, что эта цифра не имеет практического смысла, поскольку речь идет о вероятности полного погашения ссуды.

Рассмотренные примеры позволяют сделать вывод, что точечные оценки типа «будущая цена чего-либо и ее вероятность», не имеют строгого экономического смысла и непригодны для оценки риска. Для придания таким суждениям корректности необходимо задать распределения вероятностей (в частотной или субъективной интерпретации) возможных значений будущих цен, что на практике сделать практически невозможно.

Более обоснованным экономически является подход к оценке риска инвестиций, сущность которого заключается в построении распределения вероятностей значений доходности. На его основе далее вычисляется стандартное отклонение от средней доходности и коэффициент вариации, который и рассматривается как степень риска, ассоциируемого с данным активом. В соответствии с этим подходом, чем выше коэффициент вариации, тем более рискованным является данный вид актива. Основные процедуры этой методики состоят в следующем [61]:

задаются прогнозные оценки значений доходности K_i и вероятностей их осуществления P_i (все это субъективные экспертные оценки);

рассчитывается наиболее вероятная доходность K_b

$$K_b = \sum_i K_i \cdot P_i, \quad (7.3)$$

рассчитывается стандартное отклонение (O_c)

$$O_c = \sqrt{\sum_i (K_i - K_b)^2 \cdot P_i}; \quad (7.4)$$

рассчитывается коэффициент вариации (V)

$$V = \frac{O_c}{K_b}. \quad (7.5)$$

Очевидно, что если соответствующим образом отнормировать распределение P_i , чтобы оно стало соответствовать частотному, величина, рассчитываемая по формуле (7.3), будет соответствовать строгому определению математического ожидания. Однако наиболее

вероятным значением доходности она будет только в случаях симметричного распределения P_i . Во всех остальных случаях математическое ожидание не имеет достаточно ясного экономического смысла и является скорее математической абстракцией. Соответственно теряют смысл параметры O_c и V .

В рассматриваемой ситуации в случае несимметричного распределения (а симметрические гауссовские распределения в реальной жизни довольно редки) имеют смысл лишь доверительные интервалы и, собственно, сами исходные распределения

Далее возникает проблема обработки этих интервалов и распределений, и выполнения необходимых арифметических операций над ними. Именно отсутствие соответствующего математического аппарата, реализующего при экономико-математическом анализе арифметику непосредственно для интервалов и распределений, является источником большинства сложностей при применении теоретико-вероятностных методов.

Анализ характера неопределенностей, проявляющихся в финансовой оценке эффективности инвестиций, позволяет сделать вывод, что их адекватная математическая формализация может быть проведена в рамках нечетко-интервального подхода. При этом применение нечетко-интервальных моделей позволяет решить ряд проблем, практически неразрешимых в рамках классического теоретико-вероятностного подхода. В частности, появляется возможность непосредственного проведения арифметических операций с параметрами, заданными в нечетко-интервальной форме, что не удастся сделать при их описании частотными распределениями. Появляется также возможность описания неопределенностей, имеющих субъективную природу, что является крайне важным при прогнозах, касающихся будущих событий.

7.4.2. Нечетко-интервальная оценка чистого приведенного дохода и финансового риска инвестиций

Рассмотрение предложенной методики проведем на основе конкретного примера расчета нечетко-интервального NPV для инвестиционного проекта. Положим, что фаза строительства продолжается два года с инвестициями Kv_0 и Kv_1 для каждого года, соответственно. Получение прибыли от проекта начинается сразу же по окончании строительства и заканчивается через два года (P_2 и P_3). Ставка ссудного процента d остается постоянной в течение всего инвестиционного цикла. Положим, что инвестиции, прибыль и ставка ссудного процента являются неопределенными параметрами, заданными нечеткими интервалами. При этом будем использовать трапециевидальную форму нечеткого интервала.

Как показано в главе II, это позволяет однозначно определить каждый из них четырьмя реперными точками. В рассматриваемом примере соответствующие исходные нечеткие интервалы для инвестиций и доходов в условных единицах через свои реперные точки зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} KV_0 &= \{2, 2.8, 3.5, 4\}; & P_0 &= \{0, 0, 0, 0\}; \\ KV_1 &= \{0, 0.88, 1.50, 2\}; & P_1 &= \{0, 0, 0, 0\}; \\ KV_2 &= \{0, 0, 0, 0\}; & P_2 &= \{6.5, 7.5, 8.0, 8.5\}; \\ KV_3 &= \{0, 0, 0, 0\}; & P_3 &= \{5.5, 6.5, 7.0, 7.5\}, \end{aligned}$$

Ставку ссудного процента примем одной и той же для всех лет проекта интервальной величиной $d = \{0.08, 0.13, 0.22, 0.35\}$.

Рассчитанная по формуле (7.1) величина чистого приведенного дохода NPV приведена на рисунке 7.13.

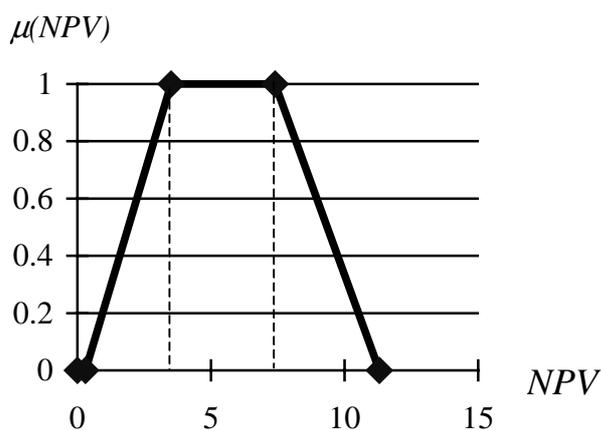


Рис. 7.13. Итоговый нечеткий интервал NPV

Как видно из рисунка. 7.13, результатом вычисления явился также нечеткий интервал. Из результатов расчетов следует, что наиболее возможные значения доходов от проекта лежат в интервале $[4, 8]$ у.е., а весь диапазон возможных будущих доходов составляет $[1, 12]$ у.е. При этом необходимо отметить, что максимальная ширина итогового интервала (ширина основания трапеции) существенно больше ширины любого из интервалов, характеризующих исходные данные, т.е. решение задачи привело к возрастанию неопределенности.

Изучим вопрос о том, насколько использование нечетко интервальной математики увеличивает неопределенность результатов по сравнению с традиционными методами учета неопределенностей, в частности, с методом статистических испытаний. При реализации метода статистических испытаний значения недетерминированных входных параметров будем выбирать случайно в соответствии с известной процедурой типа Монте-Карло (при помощи генератора случайных чисел).

Рассмотрим пример инвестиционного проекта, рассчитанного на пять лет. В четырехреперном виде входные нечетко-интервальные значения для него возьмем следующими:

$$P = (\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{3, 5, 5, 7\}, \{10, 13, 13, 16\});$$

$$V = (\{1, 3, 3, 5\}, \{0, 2, 2, 4\}, \{-1, 0, 0, 1\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\});$$

$$d = \{0.1, 0.15, 0.15, 0.2\}.$$

Здесь P - вектор нечетких интервалов, характеризующий доходы в каждом из пяти лет проекта, V - расходы, d - нечетко-интервальное значение дисконта.

Используя изложенную выше методику нечетко-интервального расчета NPV , получим:

$$NPV = \{-2.904168, 5.981243, 5.981243, 16.013865\}.$$

В рассмотренном примере для обеспечения сравнения с нормальными распределениями случайных величин все исходные нечеткие интервалы принимались в виде равнобедренных треугольников. При этом координата верхней точки соответствовала математическому ожиданию, а границы основания каждого треугольника - диапазону возможных значений случайных величин. Для нормального распределения он равен шести среднеквадратичных отклонений δ , что соответствует доверительному интервалу, в который все точки распределения попадают с вероятностью 99.73%. Для метода Монте-Карло использовался этот вид распределения, так как для него можно провести корректную оценку результатов статистических испытаний. Следует подчеркнуть, что понятия математического ожидания и дисперсии имеют содержательный смысл только для нормального или равномерного распределения. При ненормальности или существенной несимметричности распределений применение этих характеристик необоснованно. Отмеченное обстоятельство

является существенным ограничением статистического подхода. Предлагаемая нечетко-интервальная методика не накладывает такого рода ограничений на модели входных параметров.

Для проведения адекватного сравнения методик для каждого выбранного входного нечеткого интервала определялось соответствующее ему нормальное распределение. При этом значение верхней точки нечеткого интервала соответствовало математическому ожиданию, а основание нечеткого интервала - доверительному интервалу 6δ .

С использованием генератора случайных чисел проводилась серия из 1000 независимых испытаний. Для каждого испытания рассчитывались итоговые четкие значения NPV . В результате было получено частотное распределение значений NPV со следующими характеристиками: математическое ожидание - 5.94, 6δ - 6.68. Отметим, что метод Монте-Карло требует значительных затрат машинного времени, однако с учетом существующих высокопроизводительных ЭВМ и специфики задачи, не требующей отслеживания NPV в реальном масштабе времени, это обстоятельство можно считать несущественным. На рис. 7.14 графически представлены результаты расчета нечеткого интервала NPV и частотного распределения, нормированного на единицу.

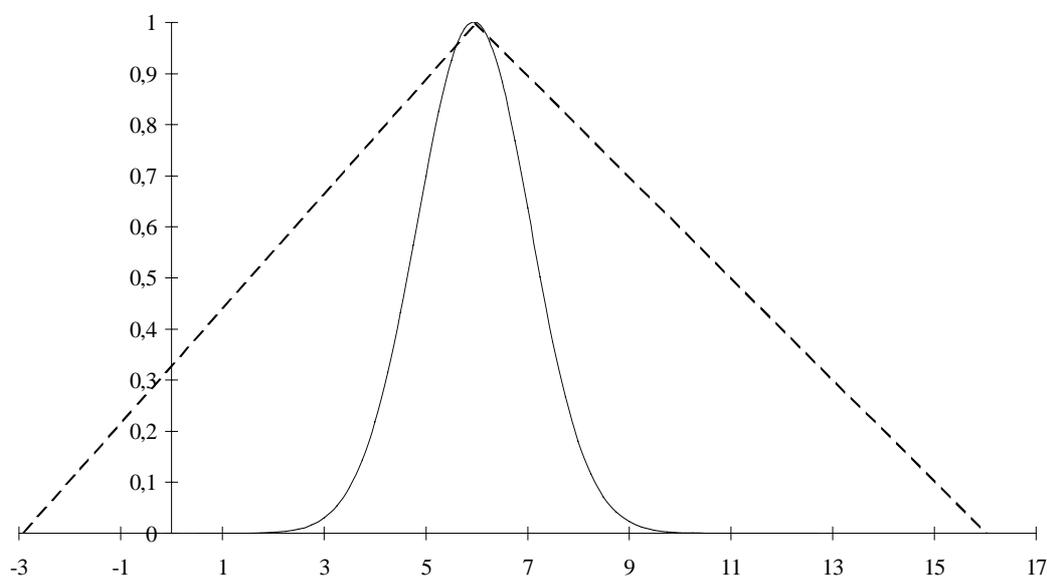


Рис. 7.14. Итоговые нечеткий интервал (штриховая линия) и частотное распределение (сплошная линия) для ожидаемого приведенного дохода NPV .

Проанализируем полученные результаты.

На рис. 7.14 изображены нечеткий интервал NPV и полученное частотное распределение, отнормированное на единицу. Из рисунка видно, что полученный итоговый нечеткий интервал существенно шире частотного распределения. Последнее объясняется, во-

первых, неизбежным ростом ширины результирующих интервалов в силу отмеченных в главе 1 внутренних свойств интервальной арифметики, во-вторых, тем обстоятельством, что реализация граничных (достаточно малых или больших) значений в методе статистических испытаний попросту маловероятна. Легко заметить, что результаты нечеткого моделирования можно расценивать как пессимистические с точки зрения их неопределенности, что выражается в значительной ширине итоговых нечетких интервалов. С другой стороны, такие результаты можно рассматривать как своего рода гарантированные оценки, поскольку нечеткое моделирование обеспечивает учет всех, в том числе граничных значений исходных четких и нечетких интервалов, описывающих неопределенные параметры модели. Отметим, что получение таких гарантированных оценок с помощью традиционного подхода на основе метода Монте-Карло практически невозможно в силу вероятностного характера этого вида моделирования

Сравним достоинства и недостатки обоих методов.

Метод Монте-Карло требует значительно больших затрат машинного времени, однако с учетом существующей мощности ЭВМ и самой специфики задачи, не требующей отслеживания *NPV* в реальном масштабе времени, этот недостаток можно считать несущественным.

Далее, необходимо обратить внимание на требования, которые каждый из методов предъявляет к входным параметрам. Метод Монте-Карло требует построения канонических частотных распределений для входных параметров. В случае инвестиционного прогнозирования подобное требование, как правило, невыполнимо, так как всевозможные экспертные прогнозы будущих доходов, затрат и дисконта, по своей природе являются не только не вероятностными, но и субъективными. Иначе говоря, эксперту значительно проще работать с нечеткими интервалами, чем с нормальными распределениями. Кроме того, само требование нормальности входных распределений, которое продиктовано невозможностью, по упомянутым выше причинам, адекватной оценки получаемых результатов для ненормального распределения, является недопустимо жестким, поскольку зачастую неопределенные значения параметров, относящиеся к будущему, не являются нормально распределенными. С другой стороны, предлагаемая нечетко-интервальная методика соответствует интуитивным представлениям экспертов о прогнозируемых параметрах и не только не ограничивает их в работе, но и предоставляет собой, как показывает практика, весьма удобный инструмент для формализации исходных данных.

В рассмотренном модельном примере с использованием метода Монте-Карло было получено некоторое итоговое нормальное распределение. Для случая нормального распределения NPV существуют методики, позволяющие в определенной мере оценивать финансовый риск. Однако в случае ненормальности распределения, когда математическое ожидание не имеет содержательного смысла, эти подходы не применимы. С другой стороны, для нечетко-интервального варианта расчета разработана представленная ниже методика, позволяющая предоставить лицу, принимающему решения, во-первых, значение риска в денежном выражении, и, во-вторых, позволяющая поставить и решить задачу оптимизации потоков платежей. В результате решения этой задачи отыскиваются четкие, неинтервальные оптимальные значения потоков платежей и NPV , причем все эти значения учитывают как неопределенность, вносимую экспертами при прогнозе денежных потоков, так и неопределенность внешней по отношению к задаче ставки дисконта, и представляют собой своего рода компромисс между стремлением к максимизации прибыли с одной стороны и уменьшением существующих неопределенностей с другой.

Существенным недостатком предлагаемой методики может считаться тот факт, что соотношение между доверительными интервалами итогового нормального распределения и соответствующими им α -уровнями итогового нечеткого интервала NPV существенно выше, чем это соотношение для входных значений. Однако решение задачи оптимизации потоков платежей приводит к уменьшению указанного соотношения до значений, соответствующих входным значениям.

Получаемые с помощью разработанной методики нечеткие интервалы NPV позволяют дать оценку прогнозируемого чистого приведенного дохода, его наиболее возможных значений, а также количественно оценить степень риска инвестиций.

Количественные оценки финансового риска инвестиций в разработанной методике основываются на определении меры (степени) четкости нечетких интервалов, подробно описанной в главе 1. Применительно к рассматриваемой задаче меру четкости получаемого нечеткого интервала NPV можно лингвистически интерпретировать как степень риска или степень неуверенности прогноза получения чистого приведенного дохода в интервале $[NPV_1, NPV_4]$:

$$dd = 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\mu_{NPV}(NPV_i) - 1|, \quad (7.6)$$

где m – число точек разбиения опорного интервала $[NPV_1, NPV_4]$.

При этом, чем четче, «прямоугольнее» интервал, тем выше степень неопределенности, а значит и риск. На первый взгляд это утверждение кажется парадоксальным, однако, любой четкий интервал, не содержащий какой либо дополнительной информации об относительной предпочтительности лежащих внутри него значений, содержит меньше полезной информации, чем построенный на его основе нечеткий интервал. В последнем случае дополнительная информация, снижающая неопределенность, обусловлена наличием функции принадлежности интервалу.

В итоге предлагаемый подход к оценке чистого приведенного дохода естественным образом порождает два критерия оценки: собственно нечеткий интервал NPV и степень неуверенности его прогноза (степень риска) dd .

7.4.3. Нечетко-интервальный расчет внутренней нормы окупаемости и связанного с ее оценкой финансового риска

Проблему нечетко-интервального расчета второго финансового показателя инвестиционного проекта — внутренней нормы окупаемости IRR — сформулируем как задачу отыскания нечетко интервального решения уравнения (5.2) относительно d . В [96] предложен метод решения уравнений с нечеткими параметрами на основе использования разложений этих параметров по α -уровням. На базе этого постановка задачи отыскания IRR (7.2) сводится к следующей системе нелинейных четко-интервальных уравнений:

$$\sum_{t=t_n}^T \frac{[P_t]_\alpha}{(1+[d]_\alpha)^t} - \sum_{t=0}^{t_c} \frac{[KV_t]_\alpha}{(1+[d]_\alpha)^t} = [0,0], \quad (7.7)$$

где $[P_t]_\alpha$ и $[KV_t]_\alpha$ - четкие интервалы, соответствующие α -уровням.

Формально в поставленной задаче в правой части (7.7) должен находиться вырожденный нулевой интервал $[0,0]$. Решение такой задачи показало, что получаемые результаты не имеют содержательного смысла.

В качестве упрощенной задачи рассмотрим пример двухлетнего проекта, согласно которому все инвестиции осуществляются в первом году, а производство продукции и получение доходов начинается и заканчивается во втором году. В этом случае каждое из уравнений для α -уровней (7.7) разбивается на два:

$$\frac{P_{11}}{(1+d_2)} - KV_{02} = 0 \text{ - соотношение для правой границы интервала } NPV, \quad (7.8)$$

$$\frac{P_{12}}{(1+d_1)} - KV_{01} = 0 \text{ - уравнение для левой границы интервала } NPV,$$

В (7.8) $\{P_{11}, P_{12}\}$, $\{KV_{01}, KV_{02}\}$ и $\{d_1, d_2\}$ - границы четких интервалов прибыли, инвестиций и дисконта на каждом из α -уровней.

Формальное решение (7.8) относительно границ интервала d_1 и d_2 тривиально:

$$d_1 = \frac{P_{12}}{KV_{01}} - 1; \quad d_2 = \frac{P_{11}}{KV_{02}} - 1. \text{ Однако, оно не имеет смысла, поскольку правая граница}$$

интервала $[d_1, d_2]$ оказывается меньше левой, так как $P_{11} < P_{12}$, $V_{01} < V_{02}$ и, следовательно из расчетов вытекает $d_2 < d_1$. Полученный результат легко объясним с общих методических позиций. Любые арифметические действия с интервалами в результате приводят также к интервалам. При этом действия с неопределенностями приводят к росту неопределенности, то есть к росту энтропии системы. Наличие в правой части постановки задачи (7.7) вырожденного нулевого интервала эквивалентно требованию снижения неопределенности левой части до нуля. Решение такой задачи стало возможным лишь при инверсном характере интервала $[d_1, d_2]$, что можно интерпретировать как требование внесения в систему отрицательной энтропии. Таким образом, формальная постановка задачи (7.7) с вырожденным нулевым интервалом в правой части оказалась некорректной.

Таким образом, требование вырожденного нулевого интервала при решении интервальных уравнений является некорректным. Более конструктивная постановка задачи была построена с помощью следующих рассуждений. Анализируя выражения (7.8) можно заметить, что для любого значения d_1 минимальная ширина интервала NPV достигается при $d_2 = d_1$. Последнее также находится в соответствии с общеметодологическими положениями: минимальная неопределенность результата (NPV) достигается при минимальной неопределенности варьируемого параметра системы. Поэтому в постановке задачи положим $d = d_1 = d_2$.

В качестве конкретной ситуации рассмотрим пример двухлетнего проекта, согласно которому в первом году осуществляются только инвестиции (в интервальной форме $KV_0 = [1, 2]$ у. е.) и нет доходов. Во втором году получается весь доход ($P_1 = [2, 3]$ у. е.) и отсутствуют какие-либо инвестиции. В этом случае уравнение (7.7) примет вид:

$$\frac{[2,3]}{1+d} - [1,2] = [NPV_1, NPV_2]. \quad (7.9)$$

Иследуем решение интервального уравнения (7.9), задавая конкретными численными значениями дисконтной ставки d , и получая при этом в качестве результата границы интервала NPV_1 и NPV_2 .

Метод решения интервального уравнения (7.9) рассмотрен ранее в главе I. На рис. 7.15 представлены результаты расчетов интервалов $[NPV_1, NPV_2]$ для различных значений d .

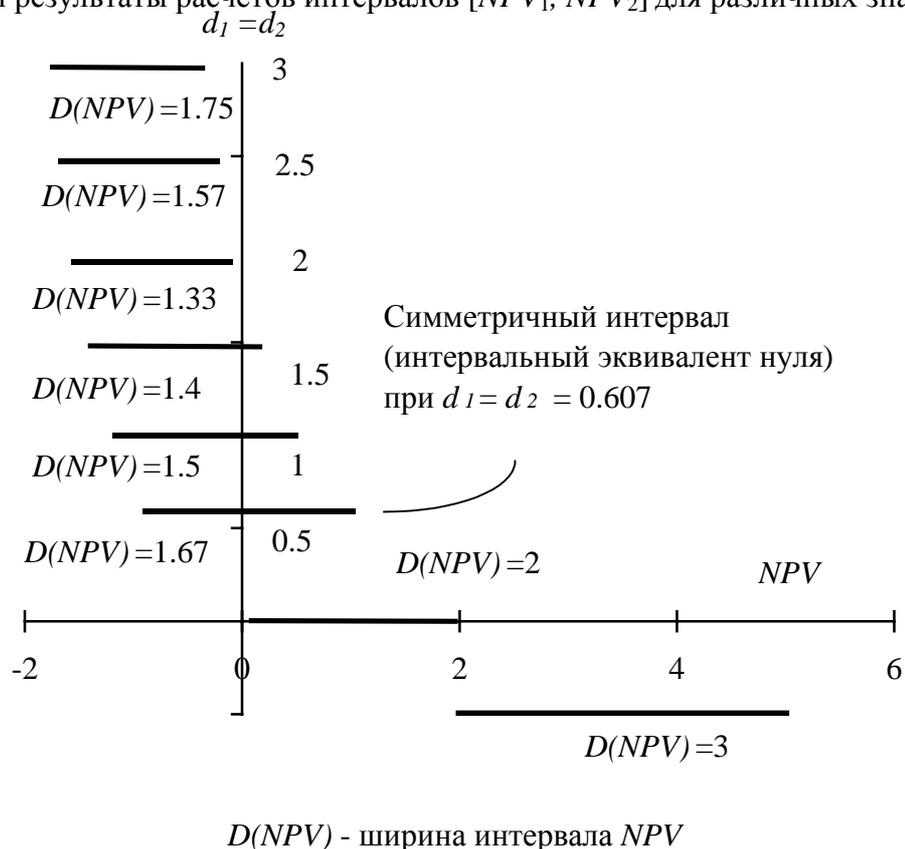


Рис. 7.15. Зависимость интервальных решений NPV от значения дисконта

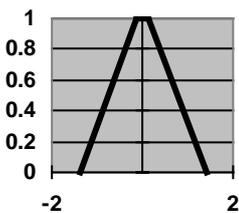
Из анализа полученного решения следует, что в зависимости от значений d изменяется как месторасположения интервала NPV на числовой оси, так и его ширина. Видно, что ширина интервала $D(NPV)$ зависит от d немонотонным образом, и при определенном значении d достигается минимум $D(NPV)$. Очевидное, на первый взгляд,

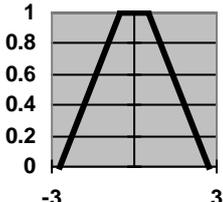
требование минимизации получаемого интервала NPV приводит к получению минимальных по размеру положительных, либо отрицательных интервалов NPV , не пересекающих, однако, нулевую точку, что не соответствует естественным представлениям об интервале в окрестности нуля. Кроме того, легко доказывается, что только требование симметричности интервала относительно нуля асимптотически устойчиво при сужении границ всех интервалов к их центрам, то есть обеспечивает верный результат и для вырожденного случая.

Таким образом, в общем случае задача сводится к отысканию таких точных (неинтервальных) значений d , которые бы обеспечивали на каждом α -уровне в уравнениях (7.7) симметричность получаемых интервалов NPV относительно нуля, т.е. гарантировали бы выполнение требования $(NPV_1 + NPV_2) = 0$ для каждого α -уровня ($\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$). Соответствующая задача решается на каждом α -уровне численно методом минимизации Ньютона.

Проведем с использованием предложенной методики сравнение двух модельных инвестиционных проектов, рассчитанных на 4 года. Нечетко-интервальные чистые потоки платежей $K_t = P_t - KV_t$ в каждом году опишем при помощи четырехреперного представления нечетких интервалов. Исходные данные для рассматриваемых проектов и результаты расчетов IRR для α -уровней представлены в таблице 7.22. Значение K_{ij} отвечает j -ой реперной точке трапецидального нечеткого числа, соответствующего чистому потоку платежей в i -ом году. Отметим, что исходные данные для первого проекта носят явно более определенный характер (основания нечетких интервалов для первого проекта уже, чем для второго).

Табл. 7.22. Финансовые показатели инвестиционных проектов

		Годы реализации проектов				Конечные показатели проектов												
		0	1	2	3	4 NPV												
платежей Проект 1		$-K_{01}=6.95$	$K_{11}=4.95$	$K_{21}=3.95$	$K_{31}=1.95$	 <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>0.314</td></tr> <tr><td>0.8</td><td>0.323</td></tr> <tr><td>0.6</td><td>0.331</td></tr> <tr><td>0.4</td><td>0.339</td></tr> <tr><td>0.2</td><td>0.347</td></tr> <tr><td>0</td><td>0.355</td></tr> </table>	1	0.314	0.8	0.323	0.6	0.331	0.4	0.339	0.2	0.347	0	0.355
	1	0.314																
	0.8	0.323																
	0.6	0.331																
0.4	0.339																	
0.2	0.347																	
0	0.355																	
	$-K_{02}=6.95$	$K_{12}=4.95$	$K_{22}=3.95$	$K_{32}=1.95$														
	$-K_{03}=7.05$	$K_{13}=5.05$	$K_{23}=4.05$	$K_{33}=2.05$														
	$-K_{04}=8.00$	$K_{14}=6.00$	$K_{24}=5.00$	$K_{34}=3.00$														

Проект 2	$-K_{01}=6.00$	$K_{11}=4.00$	$K_{21}=3.00$	$K_{31}=1.00$		
	$-K_{02}=6.95$	$K_{12}=4.95$	$K_{22}=3.95$	$K_{32}=1.95$		<i>IRR</i> 0.334
	$-K_{03}=7.50$	$K_{13}=5.50$	$K_{23}=4.50$	$K_{33}=2.50$		0.331
	$-K_{04}=8.00$	$K_{14}=6.00$	$K_{24}=5.00$	$K_{34}=3.00$		0.327
					0.323	
					0.319	
					0.314	

Как видно из таблицы 7.22, получаемые в результате расчетов для каждого α -уровня значения IRR_{α} могут, как возрастать, так и снижаться с ростом α -уровня, и в итоге для каждого проекта получается собственная область возможных значений IRR . В связи с этим возникает проблема интерпретации получаемых результатов.

Поскольку рассчитываемые на каждом α -уровне значения IRR_{α} являются неинтервальными решениями интервальной задачи, получаемые множества значений IRR_{α} затруднительно сколько-нибудь обоснованно интерпретировать в интервальном или нечетко-интервальном смысле. Поэтому необходимо получить определенные четкие неинтервальные оценки IRR .

Простейшая оценка - среднее значение IRR_{cp} - безусловно, применима, однако она не учитывает, что с ростом α -уровня растет надежность результата, т.е. IRR_{α} полученные на высоких α -уровнях, более ожидаемы и возможны, чем полученные на низких α -уровнях, уже в силу определения этих уровней.

С другой стороны, каждому IRR_{α} соответствует четкий интервал $[NPV_1, NPV_2]_{\alpha}$, величина которого является характеристикой неопределенности получаемого неинтервального значения IRR_{α} , поскольку размеры интервалов $[NPV_1, NPV_2]_{\alpha}$ количественно характеризуют отличия левых частей интервальных уравнений (7.7) от вырожденного интервального нуля $[0,0]$. Все это позволяет естественным образом ввести две взвешенные оценки IRR на множестве IRR_{α} : наименее ожидаемую (наименее надежную) IRR_{min} и наиболее ожидаемую (наиболее надежную) IRR_{max} :

$$IRR_{min} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} IRR_i (NPV_{2i} - NPV_{1i})}{\sum_{i=0}^{n-1} (NPV_{2i} - NPV_{1i})}, \quad (7.10)$$

$$IRR_{\max} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} IRR_i \alpha_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i}, \quad (7.11)$$

В практике принятия решений по выбору проектов целесообразно использовать все три получаемые оценки IRR_{cp} , IRR_{min} , IRR_{max} .

Интерпретация $[NPV_1, NPV_2]_{\alpha}$ как характеристики неопределенности получаемого неинтервального значения IRR_{α} позволяет сформировать количественную, выражаемую в денежных единицах, оценку риска инвестиций в рассматриваемый проект (степень неопределенности получаемых оценок IRR_{cp} , IRR_{min} , IRR_{max} как следствие неопределенности исходных данных) в виде:

$$R_{cp} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (NPV_{2i} - NPV_{1i})}{n}. \quad (7.12)$$

Параметр R_{cp} может играть определяющую роль при оценке альтернативных проектов.

В результате расчетов для рассматриваемого примера получено:

$IRR_{min} = 0.34$; $IRR_{max} = 0.327$; $IRR_{cp} = 0.335$; $R_{cp} = 1.56$ - для первого проекта;

$IRR_{min} = 0.322$; $IRR_{max} = 0.329$; $IRR_{cp} = 0.325$; $R_{cp} = 3.52$ - для второго проекта.

Отметим, что рассматриваемые проекты имеют весьма близкие оценки сроков окупаемости проектов IRR_{cp} , IRR_{min} , IRR_{max} . В то же время значение параметра инвестиционного риска R_{cp} для второго проекта более, чем в два раза, выше, чем у первого, что однозначно указывает на его меньшую предпочтительность.

Заметим, также, что кроме проанализированных характеристик можно ввести и другие показатели качества проектов. Например, IRR_{nr} - наиболее надежное значение IRR_{α} соответствующее минимальному по ширине интервалу $[NPV_1, NPV_2]_{nr}$ среди всех $[NPV_1, NPV_2]_{\alpha}$ и IRR_r - наименее надежное значение IRR_{α} соответствующее максимальному по ширине интервалу $[NPV_1, NPV_2]_r$ среди всех $[NPV_1, NPV_2]_{\alpha}$. При этом размеры интервалов $[NPV_1, NPV_2]_{nr}$ и $[NPV_1, NPV_2]_r$ будут являться оценками риска для соответствующих IRR_{nr} и IRR_r . Из таблицы 7.22 следует, что различия между значениями IRR_{nr} для двух рассматриваемых проектов весьма незначительны при существенной разнице в оценках риска.

7.4.4. Многокритериальная оптимизация инвестиционных проектов в условиях неопределенности

Рассмотренная выше нечетко-интервальная методика обеспечивает расчет показателя качества инвестиционных проектов. Методика характеризуется следующими основными чертами. Во-первых, основные показатели проекта — поток платежей P и показатель эффективности проекта NPV описываются нечеткими интервалами. Такие представления несут значительно больше полезной информации для анализа ситуации и принятия управленческих решений, чем обычные четкие оценки. Однако, на практике имеется потребность интерпретировать интервалы четкими числами. Так, существующие нормы в большинстве финансовых документов — в отчетах, бизнес-планах и т. д. — требуют указывать конкретные числа, а не нечеткие интервалы. Кроме того, с точки зрения инвестора вполне естественным является желание получить конкретное значение NPV , на которое можно ориентироваться при составлении, например, бизнес-плана, определенную оценку риска проекта, а также конкретные значения P_t и KV_t , рассчитанные с учетом существующей неопределенности исходных данных. При этом желательно, чтобы эти значения были в том или ином смысле оптимальными.

Разрешение этой проблемы возможно путем решения задачи оптимизации, в которой исходные нечеткие интервалы P_t и KV_t рассматриваются как ограничения на управляемые входные параметры, а d_t — как неуправляемый параметр, характеризующий неопределенность внешней по отношению к рассматриваемому проекту среды. Последнее объясняется экономической сущностью дисконта d , который определяется такими внешними рыночными факторами как динамика фондового рынка, изменение курса национальной валюты и пр.

Задачу оптимизации будем рассматривать как двухкритериальную. В качестве первого частного критерия возьмем условие максимизации будущего приведенного дохода NPV . Вторым частным критерием положим требование минимизации финансового риска, то есть минимизации ширины интервалов для NPV . Такая многокритериальная задача оптимизации требует решения вопросов адекватной математической формализации частных критериев и их представления в единой унифицированной форме, независимой от сущности показателей качества, на основе которых строятся частные критерии. Теория нечетких множеств предоставляет для этого удобный аппарат функций желательности, позволяющий переходить из пространств конкретных показателей качества в пространства соответствующих им унифицированных критериев. При этом значения каждого из критериев

единообразным способом измеряются степенью желательности, нормированной на интервале $[0,1]$.

Фактически функции желательности являются другой более удобной при решении задач оптимизации интерпретацией функций принадлежности. Поэтому при математической формализации частных критериев будем использовать конструкции функций принадлежности нечетких интервалов как функций желательности, изменяющихся от нуля в области недопустимых значений показателей качества до единицы в области наиболее предпочтительных значений. При этом важным обстоятельством является то, что таким же образом описываются ограничения в задаче. В этих условиях использование функций желательности позволяет не делать принципиальных различий между критериями и ограничениями в математической формулировке задач оптимизации, что существенно облегчает конструирование глобального критерия качества.

Перейдем к описанию постановки задачи оптимизации.

В рассматриваемой задаче наиболее важным критерием является критерий максимизации чистого приведенного дохода NPV . Его построение осуществлялось в два этапа. На первом этапе в результате подстановки исходных нечетких интервалов P_t , KV_t и d_t в выражение (7.1) находится нечеткий интервал, характеризующий изменения возможности получения тех или иных значений NPV внутри интервала допустимых значений $[NPV_1, NPV_4]$.

На втором этапе строится частный критерий, отражающий требования к доходности проекта с учетом реальных ограничений. Способ построения этого частного критерия, описываемого функцией желательности $\mu_{NPV}(NPV)$, очевиден: функцию желательности μ_{NPV} можно рассматривать лишь на интервале возможных значений NPV ($[NPV_1, NPV_4]$), причем μ_{NPV} должна возрастать с ростом NPV (рис. 4.16). Важно отметить, что при этом не принимались в расчет возможности реализации тех или иных значений NPV внутри интервала допустимых значений, поскольку эта информация неявно учитывалась при построении ограничений на основе нечетких интервалов P_t и KV_t .

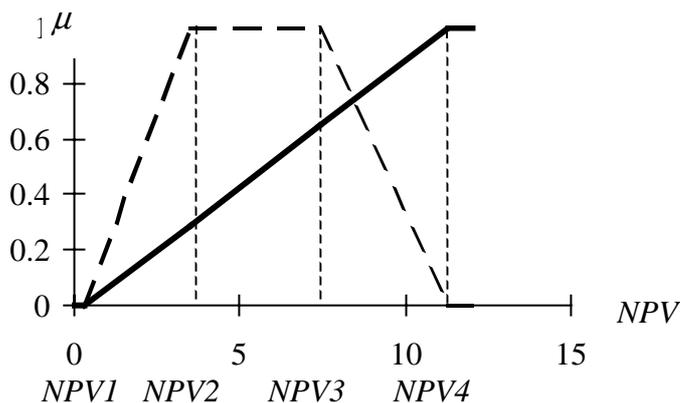


Рис. 7.16. Функция принадлежности μ_{NPV} и функция желательности $\mu d_{NPV}(NPV)$
 — μd_{NPV} ; — — μ_{NPV} .

Исходные нечеткие интервалы P_t и KV_t , также рассматриваются как функции желательности $\mu_{P_1}, \mu_{P_2}, \dots, \mu_{KV_1}, \mu_{KV_2}, \dots$, характеризующие ограничения на управляющие переменные (исходные интервалы уже построены таким образом, что при их интерпретации как функций желательности, более предпочтительными оказываются те значения из интервалов P_t и KV_t , реализация которых более возможна). Поскольку эти функции желательности связаны с возможностью реализации тех или иных значений управляющих параметров, отвечающие им частные критерии являются критериями, в совокупности неявно характеризующими финансовый риск проекта.

В связи с этим возникает проблема объединения (свертки) частных критериев в некоторый обобщенный. В настоящее время наиболее распространенными способами свертки частных критериев в обобщенные являются аддитивный, мультипликативный и min-свертка (критерий максимального пессимизма). В главе 2 показано, что аддитивный и мультипликативный способы свертки при формализации частных критериев в виде функций желательности при решении задач оптимизации могут приводить к абсурдным результатам. Использование min-свертки гарантирует получение адекватных результатов, если при свертке используемые функции желательности возводить в степени, равные рангам этих частных критериев. Поэтому максимизируемая функция или глобальный критерий строился в виде:

$$D(P_t, KV_t, d_t) = \min(\mu d_{NPV}^{\alpha_1}(NPV(P_t, KV_t, d_t)), (\min(\mu_{P_1}, \mu_{P_2}, \dots, \mu_{KV_1}, \mu_{KV_2}, \dots))^{\alpha_2}), \quad (7.13)$$

где α_1 и α_2 - задаваемые инвестором ранги, характеризующие относительную значимость для клиента доходов и рисков; $\mu_{NPV}(NPV(P_t, KV_t, d_t))$ - значение функции желательности μ_{NPV} в точке $NPV(P_t, KV_t, d_t)$.

В итоге задача сводится к отысканию набора неинтервальных (четких) значений $PP_1, PP_2, \dots, KKV_1, KKV_2, \dots$, изменяющихся в пределах, ограниченных соответствующими нечеткими интервалами $P_1, P_2, \dots, KV_1, KV_2, \dots$, которые бы максимизировали глобальный критерий (7.13):

$$\{PP_t^{di}(d_i), KKV_t^{di}(d_i)\} = \arg \max D(P_t, KV_t, d_i). \quad (7.14)$$

Задача осложнялась тем, что дисконт полагался неуправляемым параметром, равномерно распределенным в заданном интервале, хотя при опросе экспертов можно получить некоторое распределение прогнозов значения d , которое в общем случае может быть представлено неким нечетким интервалом, описываемым соответствующей функцией принадлежности $\mu_d(d_i)$.

Численная процедура решения задачи осуществлялась следующим образом. Из диапазона изменений дисконта d случайным образом выбиралось значение, для которого с помощью метода случайного направленного поиска Ноллау-Фюрста находилось оптимальное решение (7.14), соответствующее наилучшему компромиссу между требованием снижения неопределенности результата и стремлением к получению максимальной прибыли. Соответствующие оптимуму значения PP_t^d и KKV_t^d являются оптимальными при данном значении дисконта с точки зрения этого компромисса.

Далее, из интервала варьирования дисконта выбиралось следующее случайное его значение и вновь решалась задача оптимизации. Эта процедура выполнялась до тех пор, пока не набиралась статистически репрезентативная выборка оптимальных решений для различных значений дисконта. Итоговые оптимальные значения PP_t^0 и KKV_t^0 отыскивались как средневзвешенные оценки с учетом степени возможности реализации различных значений d_i , задаваемой исходным нечетким интервалом d_i , с функцией принадлежности $\mu_d(d_i)$.

$$PP_t^0 = \left(\sum_{i=1}^m PP_t^{di}(d_i) \cdot \mu_d(d_i) \right) / \sum_{i=1}^m \mu_d(d_i), \quad KKV_t^0 = \left(\sum_{i=1}^m KKV_t^{di}(d_i) \cdot \mu_d(d_i) \right) / \sum_{i=1}^m \mu_d(d_i), \quad (7.15)$$

где m - число дискретных значений дисконта d_i , использовавшихся при решении задачи.

В качестве промежуточных результатов решения задачи оптимизации были получены четкие, неинтервальные значения NPV_i , соответствующие максимальным значениям глобального критерия (7.13) для дискретных значений d_i из диапазона возможных значений дисконта. Фактически, NPV_i являются четкими значениями дохода, полученными в точке оптимума при фиксированном значении d_i . Поэтому для получения итоговых неинтервальных оценок чистого приведенного дохода, средневзвешенных по интервалу варьирования d , использовалось выражение:

$$NPV_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^m NPV_{di} * \mu_{NPV}(NPV_{di})}{\sum_{i=1}^m \mu_{NPV}(NPV_{di})}. \quad (7.16)$$

В силу построения численные значения обобщенного критерия (7.13) могут изменяться от 0 до 1, причем степень близости D к единице в точке найденного оптимума количественно характеризует успех решения задачи оптимизации. Таким образом, значение глобального критерия в точке оптимума в данном случае содержит важную информацию, которую целесообразно учитывать при расчете средневзвешенных значений PP_t^0 и KKV_t^0 . Для учета этого обстоятельства предложены выражения:

$$PP_t^0 = \left(\sum_{i=1}^m PP_t^{di} \cdot (\mu_d^{\beta_1}(d_i) \wedge D^{\beta_2}(d_i)) \right) / \sum_{i=1}^m (\mu_d^{\beta_1}(d_i) \wedge D^{\beta_2}(d_i)), \quad (7.17)$$

$$KKV_t^0 = \left(\sum_{i=1}^m KKV_t^{di} \cdot (\mu_d^{\beta_1}(d_i) \wedge D^{\beta_2}(d_i)) \right) / \sum_{i=1}^m (\mu_d^{\beta_1}(d_i) \wedge D^{\beta_2}(d_i))$$

где β_1, β_2 - ранги; $D(d_i)$ - значение обобщенного критерия (7.13) в точке оптимума для i -го значения дисконта.

Использование выражений (7.16) дает возможность учесть, помимо надежности значений d_i , количественную меру эффективности в оптимуме компромисса между стремлением снижения неопределенности результата и максимизации дохода для каждого из выбранных значений дисконта.

В результате решения задачи оптимизации получаем четкие значения PP_t^0 и KKV_t^0 , на которые можно ориентироваться при реализации инвестиционного проекта. Кроме того, можно определить оптимальное нечетко-интервальное значение NPV , подставив эти оценки и нечетко-интервальный дисконт d в выражение (7.1).

На основе разработанной методики была проведена оптимизация характеристик для первого инвестиционного проекта, представленного в таблице 7.22. В таблице 7.23 приведены рассчитанные двумя способами (7.15) и (7.17) оптимальные для этого проекта значения потоков платежей PP_t^0 и доходов KKV_t^0

Таблица 7.23. Оптимальные значения PP_t^0 и KKV_t^0

Год	Выражение (7.15)		Выражение (7.17)	
	P_t	KV_t	P_t	KV_t
0	0.00	2.49	0.00	2.50
1	0.00	0.83	0.00	0.79
2	8.05	0.00	8.04	0.00
3	7.12	0.00	7.09	0.00

Соответствующие значения чистого приведенного дохода в точке оптимума, полученные в виде нечетких интервалов, равны:

$$NPV_{(7.15)} = \{4.057293, 6.110165, 8.073906, 9.454419\};$$

$$NPV_{(7.16)} = \{4.065489, 6.109793, 8.064094, 9.436519\}.$$

По этим данным, пользуясь методикой, описанной в пункте 7.4.2 (выражение 7.12), можно определить степень риска полученных оптимальных значений, которая будет обусловлена лишь внешней по отношению к проекту неопределенностью дисконта.

Средневзвешенные четкие оценки для NPV имеют значения $NPV_{(7.15)} = 6.8931$, $NPV_{(7.16)} = 6.8942$. Полученные расчетные данные свидетельствуют о том, что на практике итоговые результаты, полученные для оптимизируемого проекта с использованием выражений (7.15), (7.16) различаются незначительно.

На рис. 7.17 представлен нечеткий интервал, рассчитанный для полученных четких (неинтервальных) оптимальных значений потоков платежей, в сопоставлении с исходным интервалом, полученным прямым расчетом по исходным нечетким интервалам P_t и KV_t и d , без использования оптимизации. Нечетко-интервальный вид получаемого при этом NPV обусловлен исключительно нечетко-интервальной формой задания дисконта d .

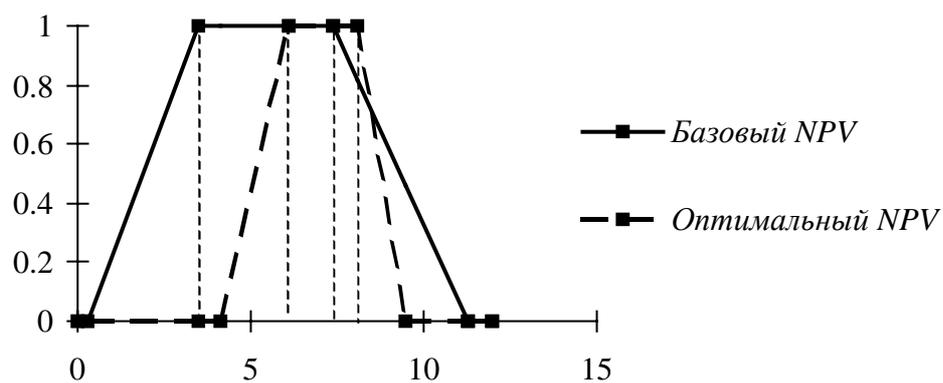


Рис. 7.17. Сравнение нечетко-интервальных величин NPV для базового и оптимального проектов.

Как видно из рисунка, оптимизация позволила достигнуть поставленных целей: налицо существенный рост прогнозируемых значений NPV . При этом также достигается сужение нечеткого интервала NPV в точке оптимума, что свидетельствует о снижении финансового риска.

ЛИТЕРАТУРА

1.	Аврамчук Е.Ф., Вавилов А.А., Емельянов С.В. и др. Технология системного моделирования - М.: Машиностроение, 1988. 520 с.
2.	Авчинкин Д.В. Международные перевозки: правовые аспекты перемещения грузов и пассажиров. Мн.: Амалфея, 1999. 304 с.
3.	Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. 279 с.
4.	Акчурин И.А. Единство естественнонаучного знания. М.: Прогресс, 1970. 164 с.
5.	Алексеев А.В. Интерпретация и определение функций принадлежности нечетких множеств // Методы и системы принятия решений. Рига. 1979. С. 42 - 50.
6.	Балабанов И.Т., Балабанов А.И. Внешнеэкономические связи: Учебное пособие. М.: Финансы и статистика, 1998. 512 с.
7.	Барановский Н.Ф., Севастьянов П.В. Идентификация теплообмена при литье металлов и сплавов. Минск: Наука и техника, 1989. 184 с.
8.	Баринов Э.А. и др. Формы расчетов и средства платежа в международном обороте /Под ред. Э.А. Баринова. М.: Финансы и статистика, 1990. 291 с.
9.	Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
10.	Белосевич В.К., Нетесов Н.П. Совершенствование процесса холодной прокатки. М.: Металлургия, 1971. 272 с.
11.	Блех Ю., Гетце У. Инвестиционные расчеты /Пер. с нем. Калининград: Янтарный сказ, 1997. 437 с.
12.	Блишун А.Ф., Шапиро Д.И. Принятие решений на основе лингвистического представления ситуационных данных и критериев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. № 5. С. 212-217.
13.	Борисов А.Н. Анализ решений и теория нечетких множеств // Методы и системы принятия решений. Методы и модели анализа решений. Рига. 1981. С. 5 – 10.
14.	Борисов А.Н. Корнеева Г.В. Лингвистический подход к построению моделей принятия решений в условиях неопределенности //Методы

	принятия решений в условиях неопределенности. Рига, 1980. № 7. С. 4-11.
15.	Борисов А.Н., Крумберг О.А. Анализ решений при выборе технологических объектов // Методы принятия решений в условиях неопределенности. Рига, 1980. № 7. С. 126 – 134.
16.	Борисов А.Н., Попов В.А. Один класс задач многокритериальной оптимизации при лингвистическом задании критериев // Методы и модели управления и контроля. Рига, 1979. С. 56 – 61.
17.	Брехт Б. Театр: В 5 т. М.: Искусство, 1965. Т. 5. 320 с.
18.	Булыгин В.Я. Правдоподобное моделирование. Казань: Изд-во ун-та, 1985. 170 с.
19.	Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
20.	Бухгалтерский анализ /Пер. с англ. Киев: Торгово-издательское бюро ВНУ, 1993. 398 с.
21.	Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3 т. М.: Мир, 1972 – 1973. т. 3. 210 с.
22.	Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1980. 208 с.
23.	Верстнин И.С. Методологический аспект теории расплывчатых понятий. М., 1978. 40 с. Деп. в ВИНТИ 4.11.78, № 3431.
24.	Вилкас Э.Й., Майминас Е.З. Решения: теория, информация, моделирование. М.: Радио и связь, 1981. 328 с.
25.	Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 220 с.
26.	Глазунов В.Н. Финансовый анализ и оценка риска реальных инвестиций. М.: Финстатинформ, 1997. 135 с.
27.	Гордеев Г.Д., Иванова Л.Я., Казанцев С.К. и др. Внешнеэкономическая деятельность предприятия. Учебник для ВУЗов. М.: Закон и право, ЮНИТИ, 1996. 345 с.
28.	Данилов-Данильян В.И., Рыбкин А.А. Моделирование: системно-методологический аспект //Системные исследования. Методологические проблемы. М., 1982. С. 182-209.

29.	Дегтярева О.И. и др. Внешнеэкономическая деятельность: Учебное пособие. М.: Дело, 1999. 320 с.
30.	Дилигенский Н.В. Анализ и структуризация фундаментальных свойств, характеристик и проблем управления сложными системами // Известия СНЦ РАН. 2000. №2. С. 72-81.
31.	Дилигенский Н.В., Орлова Е.Ю. Синтез экономико-математических моделей управления региональными производственными системами // Вестник СамГТУ. 2000. Выпуск 5. с. ?
32.	Дилигенский Н.В., Раппопорт Э.Я. Современные концепции построения и применения общей теории управления сложными системами / Проблемы управления и моделирования в сложных системах // Труды III Международной конференции. Самара: СНЦ РАН. 2001. с. 116-127.
33.	Дилигенский Н.В., Севастьянов П.В., Туманов Н.В. Нечеткая идентификация математических моделей энергообмена в технологических процессах // Инженерно-физический журнал. 1983. Т. 45 . № 5. С. 814-816.
34.	Дилигенский Н.В., Севастьянов П.П., Туманов Н.В. Использование полиномиальных аппроксимаций в нелинейном оценивании параметров // Методы и средства машинной диагностики газотурбинных двигателей и их элементов: Тез. докл. Всесоюз. конф. Харьков, 1980. С. 18 – 19.
35.	Дилигенский Н.В., Цапенко М.В. Аналитические подходы к оценке эффективности процессов и производств / Наука, бизнес, образование // Сборник статей IV Всероссийской, межвузовской, научной конференции. Самара: СамГТУ. ПИБ. 2001. с. ?
36.	Дилигенский Н.В., Цапенко М.В. Построение и анализ макромоделей производственного технологического комплекса / Наука, бизнес, образование // Сборник статей IV Всероссийской, межвузовской, научной конференции. Самара: СамГТУ. ПИБ. 2001. с. ??.
37.	Дилигенский Н.В., Цапенко М.В. Формирование системных оценок эффективности региональных промышленных комплексов / Проблемы управления и моделирования в сложных экономических системах // Труды III Международной конференции. Самара: СНЦ РАН. 2001. с. 308-320.
38.	Дымова Л., Севастьянов Д. Применение методов теории нечетких

	множеств для оценки эффективности инвестиций // Финансы, учет, аудит. 1997. № 3. С. 34-38.
39.	Дымова Л.Г. Методика построения гипернечетких функций желательности с учетом мнений группы экспертов при решении задач оценки и оптимизации качества методами теории нечетких множеств // Вестник Самарского Государственного Технического Университета. Серия Технические науки. 2002, Выпуск 15. С. 24-28.
40.	Дымова Л.Г., Жесткова Е.С., Севастьянов П.В. Оценка качества контракта // Риск. 2001. № 1. С. 60 – 65.
41.	Дымова Л.Г., Малевич Ю.А., Папкович В.Н, Севастьянов П.В. Седяко Т.Г. Оптимизация режимов нагрева стали в печи с шагающими балками // Энергетика. 1989. № 8. С. 86 – 91.
42.	Дымова Л.Г., Севастьянов П.В., Седяко Д.Г., Стеблов А.Б. Математическая модель взаимосвязанных процессов нагрева, окисления и обезуглероживания стальных слитков // Доклады АН БССР. 1990. Т.34. № 11. С. 1020 – 1022.
43.	Дымова Л.Г., Севастьянов П.В., Стеблов А.Б. Методика многокритериальной оптимизации технологии термообработки проката при наличии нескольких экстремумов // Доклады АН БССР. 1990. Т. 34. № 3. С. 231 - 233.
44.	Дымова Л.Г., Севастьянов П.В., Шейграцева Л.И. Многокритериальная оценка уровня социально-экономического развития регионов // Белорусский экономический журнал. 1999. № 2. С. 112 – 118.
45.	Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990. 288 с.
46.	Жесткова Е.С., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Методика многокритериальной оценки качества продукции // Машиностроитель. 1999. № 11. С. 40 – 43.
47.	Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. – 164 с.
48.	Зах Р.Г. Котельные установки. М.: "Энергия", 1968. 352 с.
49.	Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными

	системами. Киев: Техника, 1975. 312 с.
50.	Изучение показателей здоровья населения в связи с загрязнениями окружающей среды. Методические рекомендации. Киев, 1985. 34 с.
51.	Исикава К. Японские методы управления качеством / Пер. с англ. М.: Экономика, 1988. 103 с.
52.	Казанцев Е.И. Промышленные печи. М.: Metallургия, 1975. 368 с.
53.	Кайберг Г. Вероятность и индуктивная логика. М.: Прогресс, 1978. 375 с.
54.	Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: «Наука», 1986. 223 с.
55.	Капельян С.Н., Левкович В.А. Основы коммерческих и финансовых расчетов. Мн.: НТЦ «АПИ», 1999. 224 с.
56.	Карнап Р. Философские основания физики.. М.: Прогресс, 1971. 390 с.
57.	Карташева Т.М. Вопросы оптимизации при разработке рецептуры и технологии получения новых полимерных материалов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М. 1969. 20 с.
58.	Касты Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. М.: Мир, 1982. 266 с.
59.	Кацев П.Г. Статистические методы исследования режущего инструмента. М.: Машиностроение, 1974. 231 с.
60.	Киселев Н.А. Котельные установки. Учеб. пособие для техн. училищ. М.: Высш. школа, 1975. 277 с.
61.	Ковалев В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. М.: Финансы и статистика, 1995. 432 с.
62.	Козлова О.И., Сморгочкова М.С., Голубович А.Д. Оценка кредитоспособности предприятий. М.: АО «Арго», 1993. 398 с.
63.	Колмогоров А.. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974. 120 с.
64.	Коммерческая оценка инвестиционных проектов. Основные положения методики. С.-П.: ИКФ «Альт», 1993. 246 с.
65.	Коновалов Ю.В., Остапенко А.Л. Температурный режим широкополосных станов горячей прокатки. М.: Metallургия, 1974. 175 с.
66.	Кофман А., Алуха Х. Хил. Введение теории нечетких множеств в

	управлении предприятием. Минск: Высшая школа, 1992. 223 с.
67.	Кравец А.С. Природа вероятности. М.: Мысль, 1976. 173 с.
68.	Крейндлин Н.Н. Расчет обжатый при прокатке цветных металлов. М.: Metallurgizdat, 1963. 255 с.
69.	Кун Т. Структура научных революций. М.: Прогресс, 1975. 238 с.
70.	Курдюмов И.В., Мосолова М.В., Назайкинский В.Е. Задача многоцелевой оптимизации с нечеткими условиями // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 3 - 8.
71.	Леванов А.Н., Колмогоров В.А., Буркин С.П. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением. М.: Metallurgiya, 1976. 410 с.
72.	Левченков В.С. Математическое описание систем с субъективно определенными переменными // Тр. ин-та /ВНИИ системных исследований. М. 1980. № 6. С. 14 - 33.
73.	Луговской В.М. Алгоритм автоматизации листовых станов. М.: Metallurgiya, 1974. 320 с.
74.	Лэдсон Л.С. Оптимизация больших систем. М.: Наука, 1975. 431 с.
75.	Манджапарашвили Г.В. Об определении вероятностей размытых событий // Сообщение АН ГрузССР. 1980. Т. 97. № 3. С. 585 - 588.
76.	Марилл Линч, Пиерс Финнер, Энд Смит. Как читать финансовый отчет /Пер. с англ. М.: Дело, 1992. 298 с.
77.	Меерович И.М. Прокатка плит и листов из легких сплавов. М.: Metallurgiya, 1969. 252 с.
78.	Международная торговля: финансовые операции, страхование и другие услуги. К.: Торгово-издательское бюро ВНУ, 1996. 480 с.
79.	Международное коммерческое дело: Учебник для ВУЗов. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1996. 392 с.
80.	Международные внешнеэкономические и финансовые отношения. Учебник /Под ред. Красавина Л.Н. М.: Финансы и статистика, 1995. 498 с.
81.	Методические указания по составлению и содержанию энергетических характеристик оборудования тепловых электростанций. РД 34.09.155-93 / М-во топлива и энергетики РФ. М.: Служба передового опыта ОРГРЭС, 1993. 158 с.

82.	Методические указания по составлению отчета электростанции и АО энергетики и электрификации о тепловой экономичности оборудования. РД 34.08.552-93 / М-во топлива и энергетики РФ. М.: Служба передового опыта ОРГРЭС, 1993. 124 с.
83.	Миллер Д.А. Магическое число семь плюс-минус два: некоторые ограничения в нашей способности обрабатывать информацию // Инженерная психология. Москва: Прогресс. 1964. С. 192-255.
84.	Мироненко А. Модель эмпирических рисков по судам и клиентам // Надежные программы. 1995. № 2. С. 9-11.
85.	Могилевская ТЭЦ-2. Заключение по режимно-наладочным испытаниям котла ТГМ-84/Б ст. №7 при совместном сжигании природного газа и мазута. Мн.: ОАО «Белэнерггоремналадка», 1997. 15 с.
86.	Модели принятия решений на основе лингвистической переменной //Борисов А.Н., Алексеев А.В., Крумберг О.А. и др. Рига: Зинатне, 1982. 256 с.
87.	Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 224 с.
88.	Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: «Наука», 1981. 488с.
89.	Налимов В.В. Теория эксперимента. М.: Наука, 1971. 207 с.
90.	Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. М.: Металлургия, 1981. 152 с.
91.	Нариньяни А.С. Недоопределенность в системе представления и обработки знаний // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1986. № 5. С. 8 - 11.
92.	Нариньяни А.С. Недоопределенные множества - новый тип данных для представления знаний. Препринт ВЦ СО АН СССР. № 232. Новосибирск, 1980.
93.	Нариньяни А.С., Иванов Д.А., Седреев С.В., Фролов С.А. Недоопределенное календарное планирование: новые возможности // Информационные технологии. 1997. № 1. С. 34 – 37.
94.	Негойце К. Применение теории систем и проблем управления. М.: Мир, 1981. 180 с.
95.	Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями

	экономических систем. М.: Мир, 1975. 262 с.
96.	Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, 1986. 312 с.
97.	Новик И.Б. О моделировании сложных систем: (Философский очерк). М.: Мысль, 1965. 345 с.
98.	Новик И.Б., Мамедов Н.М., Давтян Н.А. Логика научного познания и метод моделирования // Философско-методологические основания системных исследований. М., 1983. С. 156-179.
99.	Новик Ф.С., Арзов Я.Б. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования эксперимента. М.: Машиностроение, 1980. 304 с.
100	Общая теория статистики. Учебник под ред. Спирина А.А., Башиной О.Э. М.: Финансы и статистика, 1994. 296 с.
101	Орлов В.К., Герцев А.И. Исследование изменения температуры при горячей прокатке листов // Обработка давлением металлов и сплавов. М., 1971. С. 264 – 222.
102	Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. 208 с.
103	Парков Н.Ф., Венберг А.В. Программная система для оперативного управления и оптимизации режимов работы котельных установок при нечетко-интервальной неопределенности. // Новые информационные технологии: Тр. 4-й междунар. конф. Минск, 5-7 декабря 2000 г.: В 3-х кн. Кн. 3. Мн.: БГЭУ, 2000. С. 115.
104	Пешель М. Моделирование сигналов и систем. М.: Мир, 1981. 300 с.
105	Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето - оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
106	Покровская В.В. Организация и регулирование внешнеэкономической деятельности: Учебник. М.: Юрист, 1999. 456 с.
107	Попырин Л.С., Самусев В.И., Эпельштейн В.В. Автоматизация математического моделирования теплоэнергетических установок. М.: Наука, 1981. 236 с.
108	Правила технической эксплуатации электрических станций и сетей / М-во энергетики и электрификации СССР. 14-е изд. перераб. и доп. М.:

	Энергоатомиздат, 1989. 288 с.
109	Правовое регулирование ВЭД: Учебное пособие /М.Г. Пронина, Д.Ф. Ерофеева и др. /Под ред. М.Г. Прониной. Мн.: БГЭУ, 1994. 190 с.
110	Райфа Г. Анализ решений. М.: Наука, 1977. 408 с.
111	Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2 т. М.: Мир, 1986. Т. 1. 295 с.
112	Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2 т. М.: Мир, 1986. Т. 2. 320 с.
113	Романов А.Н., Лукаевич И.Я. Оценка коммерческой деятельности предпринимательства. М.: Финансы и статистика, Банки и биржи, 1993. 459 с.
114	Рузавин Г.И. Взаимосвязь теорий и проблема интертеоретических отношений // Эксперимент. Модель. Теория. М., 1982. С. 289-305.
115	Руководство по инфекционным болезням /Под ред. проф. Ю.В. Лобзина и проф. А.П.Казанцева. СПб.: Комета, 1996. 715 с.
116	Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991. 224 с.
117	Севастьянов П.В. Опыт использования математического аппарата теории нечетких множеств в моделировании и оптимизации технико-экономических систем / Актуальные проблемы информатики. Часть 2 // Материалы конференции. Минск, 1998. С. 247 - 253.
118	Севастьянов П.В., Вальковский В.И. Имитационное моделирование технологических процессов в транспортно-сбытовой логистике при нечетких исходных данных // Ресурсы Информация Снабжение Конкуренция. 1999. № 2-3. С. 79 - 83.
119	Севастьянов П.В., Вальковский В.И. Методика нечетко- интервального имитационного моделирования технико-экономических систем // Информационные технологии. 1999. № 6. С. 23 - 26.
120	Севастьянов П.В., Вальковский В.И., Веремеев А.Н. Экономико-математическое моделирование транспортносырьевого цеха комбината силикатных изделий // Строительные материалы. 1999. № 11. С. 95 - 96.
121	Севастьянов П.В., Венберг А.В. Конструктивная методика сравнения

	нечетких чисел и ее применение в задачах оптимизации / Информационные сети, системы и технологии // Тр. VII междунар. конф. Минск, 2-4 октября 2001 г.: В 3-х томах. Т. 3. Мн. : БГЭУ, 2001. С. 52-57.
122	Севастьянов П.В., Венберг А.В. Моделирование и оптимизация работы энергоагрегатов при интервальной неопределенности // Энергетика (Известия вузов и энергетических - объединений СНГ). Минск: БГПА. 1998. № 3. С. 66 - 70.
123	Севастьянов П.В., Венберг А.В. Оптимизация технико-экономических параметров работы энергоагрегатов при нечетких исходных данных. // Энергетика. (Изв. высших учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). Минск: БГПА, 2000. № 1. С. 62-70.
124	Севастьянов П.В., Венберг А.В. Прикладное программное обеспечение для оперативного управления и оптимизации работы котельных установок. // Энергоэффективность. Минск. 1999. № 10. С. 8-10.
125	Севастьянов П.В., Дымова Л.Г., Каптур М., Зенькова А. В. Методика многокритериальной иерархической оценки качества в условиях неопределенности // Информационные технологии. 2001. № 9. С. 84 - 87.
126	Севастьянов П.В., Дымова Л.Г., Чегерова Т.И. и др. Методика комплексной оценки экологического состояния регионов для принятия оптимальных управленческих решений / Методические рекомендации. Утверждены Министерством Здравоохранения Республики Беларусь. Могилев, 2000. 29 с.
127	Севастьянов П.В., Парков Н.Ф., Венберг А.В. Экономико-математическая модель и оптимизация режимов паросиловых установок, работающих на комбинированном топливе. // Энергоэффективность. Минск. 1998. № 12. С. 8-9.
128	Севастьянов П.В., Севастьянов Д.П. Извлечение максимума // Риск. 1998. № 5-6. С. 71 – 75.
129	Севастьянов П.В., Севастьянов Д.П. Оптимизация финансовых параметров инвестиций в условиях неопределенности // Управление капиталом. 1998. № 1. С. 33 - 37.
130	Севастьянов П., Севастьянов Д. Методическое и программное обеспечение

	финансово-экономического анализа в условиях неопределенности исходных данных / Информационно-аналитические системы в финансовой деятельности // Тезисы докладов Первого Белорусского Форума. Минск, 1997. С. 50 - 55.
131	Севастьянов П., Севастьянов Д. Оценка финансовых параметров и риска инвестиций с позиций теории нечетких множеств // Надежные программы. 1997. № 1. С. 10-18.
132	Севастьянов П.В., Туманов Н.В. Многокритериальная идентификация и оптимизация технологических процессов. Минск: Наука и техника, 1990. 224 с.
133	Список ПДК загрязнений №3086-84 от 20.08.84г. Минздрава БССР.
134	Тепловой расчет котельных агрегатов. Нормативный метод. М.: Энергия, 1973. 340 с.
135	Третьяков А.В., Гербер Э.А. Расчет и исследование валков холодной прокатки. М.: Машиностроение, 1966. 173 с.
136	Туманов Н.В. Оптимизация и нелинейное оценивание параметров моделей энерготехнологических процессов // Управление и оптимизация процессов технологического нагрева. Куйбышев, 1986. С. 102 – 109.
137	Турбан Н.И. Внешнеэкономическая деятельность. Учебное пособие. Мн.: Вышэйшая школа, 1999. 319 с.
138	Тынель А. Курс международного торгового права /Под ред. Тынель А. Мн.: Амалфея, 1999. 224 с.
139	Уемов А.И. Системный подход и общая теория систем. М.: Мысль, 1978. 262 с.
140	Федоров В.В. Имитационные эксперименты. Вторичные модели // Философско-методологические основания системных исследований. М., 1983. С. 248-260.
141	Флейшман Б.С. Элементы теории потенциальной эффективности сложных систем. М.: Сов. радио, 1971. 224 с.
142	Флейшман Б.С., Брусиловский П.М., Розенберг Г.С. О методах математического моделирования сложных систем // Системные исследования. Методологические аспекты. М., 1982. С. 65-79.

143	Форрестер Дж. Антиинтуитивное поведение сложных систем //Современные проблемы кибернетики. М., 1977. С. 9-25.
144	Хил Лафуенте А.М. Финансовый анализ в условиях неопределенности. Минск: Технология, 1998. 150 с.
145	Целиков А.И. Основы теории прокатки. М.: Металлургия, 1965. 247 с.
146	Черняк В.С. История. Логика. Наука. М.: Наука, 1986. 372 с.
147	Четыркин Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Business Речь, Дело, 1992. 320 с.
148	Шеннон Р. Имитационное моделирование - искусство и наука.. М.: Мир, 1978. 418 с.
149	Шенфельд Р., Хабигер Э. Автоматизированные электроприводы. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 200 с.
150	Шер А.П. Согласование неточных экспертных оценок и функция принадлежности в методе размытых множеств // Моделирование и исследование систем автоматического управления. Владивосток. 1978. С. 111 -118.
151	Шокин Ю.И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука. Сиб. Отделение, 1981. 112 с.
152	Штофф В.А. Моделирование и философия. .-Л.: Наука, 1966.- 240 с.
153	Язенин А.В. Задача векторной оптимизации с нечеткими коэффициентами важности критериев // Математические методы оптимизации и управления в сложных системах. Калинин, 1981. С. 38 – 51.
154	Altrock C. Fuzzy logic. Band 1. Technologie. Munchen, BRD: R. Oldenburg Verlag GmbH, 1993. 475 p.
155	Altrock C. Fuzzy logic. Band 2. Technologie. Munchen, BRD: R. Oldenburg Verlag GmbH, 1994. 375 p.
156	Altrock C. Fuzzy logic. Band 3. Werkzeuge. Munchen, BRD: R. Oldenburg Verlag GmbH, 1995. 287 p.
157	Altrock C., Krause B., Zimmermann H.J. Advanced fuzzy logic control of a model car in extreme situations // Fuzzy Sets and Systems. 1992. V. 48. № 1. P. 41 – 52.
158	Aoki S., Kawachi S. Application of fuzzy control for dead-time processes in a

	glass melting furnace // Fuzzy Sets and Systems. 1990. Vol. 38. № 5. P. 251 – 256.
159	Asai K., Sugeno M., Terano T. Applied Fuzzy Systems. New York: Academic Press, 1994.
160	Baas S.M., Kwakernaak H. Rating and ranking multiple-aspect alternatives using fuzzy sets // Automatics. 1977. № 13. P. 47-58.
161	Baldwin J.F., Guuid N.C.F. Comments on the «fuzzy max» operator of Dubois and Prade // Int. J. Systems Sci. 1979. V.10. № 9. P.1063 - 1064.
162	Baldwin J.F., Pilsworth B.W. A Theory of fuzzy probability // Proc. 9 th Int. Symp. Multiple. Valuid Logic 1979. New York. 1979. P. 53 - 61.
163	Becker M., von Recum S. Verfahren zur bedarfsgesteuerten Abtuerkennung in Kalteanlagen unter Einsatz eines Fuzzy Entscheiders // Proc. 39 Internationales Wissenschaftliches Kolloquium. Ilmenau. BRD. 1994. P. 316 – 323.
164	Bellman R., Gierts M. On the analytic formalism on the theory of fuzzy Sets // Information Science. 1973. V. 5. P. 149 - 156.
165	Bellman R., Zadeh L Decision-making in fuzzy environment //Management Science. 1970. V. 17. P. 141 - 164.
166	Bertiny C. A formalization of interval based temporal subsumption in first order logic / In : Foundation of Knowledge Representation and Reasoning // Lect. Notes in AI, 810. Berlin: Springer Verlag, 1994. P. 53-73.
167	Bezdek J.C., Pattern recognition with fuzzy objective algorithms. New York: Plenum Press, 1981. 234 p.
168	Bien Z., Hwang D.H., Lee J.H., Ryu H.K. An automatic start-up and shutdown control of drum-type boiler using fuzzy logic // Proc. 2 nd Int'l Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. II Zuka. Japan. 1992. P. 465 – 468.
169	Biles W., Swein J. Optimization and Industrial Experimentation. New York: Wiley, 1980. 310 p.
170	Bodjanova S. Approximation of fuzzy concepts in decision making // Fuzzy Sets and Systems. 1997. V.85. P. 23 – 29.
171	Bogle H.F., Jehenck G.K. Investment Analysis: US Oil and Gas Producers Score High in University Survey // Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium. Dallas, 14-15 March, 1985. P. 87 – 92.

172	Borisov A.N., Krumberg O.A. A theory of possibility for decision-making // Fuzzy Sets and Systems. 1983. Vol. 9. № 1. P. 34 – 38.
173	Bork P., Selig M., Krummen H., Schiller E. Fuzzy control zur Optimierung der Kuhlwasseraufbereitung an einer Chemie-Reaktoranlage // Automatisierungstechnische Praxis. 1993. Vol. 35. № 5. P. 306 – 309.
174	Bortolan G., Degani R. A review of some methods for ranking fuzzy subsets // Fuzzy sets and Systems. 1985. № 15. P. 1-19.
175	Brown M., Harris C. Neurofuzzy adaptive modeling and control. New York, USA: Prentice Hall, 1994. 125 p.
176	C++ Interval Arithmetic Library Reference. http://docs.sun.com/htmlcollcoll.693/iso-8859-1/CPPARIT.../iapg_ref_man.htm .
177	Capra P. Modern Physics and Eastern Mysticism // The Transpersonal Psychol. 1976. Vol. 8. № 1. P. 20 – 39.
178	Caprani O., Madsen K. Mean value forms in interval analysis // Computing. 1980. Vol. 25. № 2. P. 147 - 154.
179	Chanas S., Kuchta D. Multiobjective Programming in optimization of the Interval Objective Functions- a generalized approach // European Journal of Operational Research. 1996. № 9. P. 594-598.
180	Chew G.F. Bootstrap: A Scientific Idea // Science. 1968. Vol. 161. № 3843. P. 762 – 765.
181	Choi D.-Y., Oh K.-W. Asa and its application to multi-criteria decision making // Fuzzy Sets and Systems. 2000. V. 114. P. 89 - 102.
182	Chu A., Kalaba R., Springarn R. A Comparison pf Two Methods for Determining the weights of Belonging to Fuzzy Sets // J. of Optimization theory and applications. 1979. Vol. 27. № 4. P. 531 – 538.
183	Cupta M.M., Nikiforuk K.P. On the characterization of fuzzy processes: some observations // Proc. 18 th IEEE Conf. Decis. And Contr. Includ. Symp. Adapt. Process.1979. New York. 1979. V.2. P. 788 - 789.
184	Deluca A., Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy the of fuzzy sets theory // Information and Control. 1972. V. 20. № 4. P. 301 - 312.
185	Deluca A., Termini S. Entropy of L-fuzzy sets // Information and Control. 1974. V.24. № 1. P. 55 - 73.

186	Deluca A., Termini S. On convergence of entropy measures of a fuzzy set // Cybernetics. 1977. V. 6. P. 219 - 222.
187	Dempster A.P. Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping // Ann. of Math. Statistics. 1967. V.38. P. 325 - 339.
188	Diamond Ph., Kloeden P. Metric spaces of fuzzy sets // Fuzzy sets and Systems. 1990. № 35. P. 241-251.
189	Dishkant H. About membership functions estimation // Fuzzy Sets and Systems. 1981. Vol. 5. № 2. P. 141 -147.
190	Drewniak J. Axiomatic systems in fuzzy algebra // Acta cybernetique. 1981. V. 5. №.2. P. 191 - 206.
191	Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M. An introduction to fuzzy control. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 135 p.
192	Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M. Wprowadzenie do sterowania rozmytego. Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1996. 278 p.
193	Dubois D., Koenig J.L. Social choice axioms for fuzzy set aggregation // Fuzzy Sets and Systems. 1991. V. 43. P. 257 – 274.
194	Dubois D., Prade H. Fuzzy sets and systems. Theory and applications. New York: Asad. Press, 1980. XVIII. 344 p.
195	Dubois D., Prade H. Ranking of Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory // Information Sciences. 1983. № 30. P. 183-224.
196	Dumitrescu D. A definition of an informational energy in fuzzy sets theory // Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 1977. V.22. № 2. P. 57 - 59.
197	Dumitrescu D. On some measures of nonfuzziness // Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 1978. V. 23. № 2. P. 45 - 48.
198	Dyckhoff H. Basic concepts for theory of evaluation: hierarchical aggregation via autodistributive connectives in fuzzy set theory // European J. Operation Research. 1985. V. 20. P. 221-233.
199	Dymova L., Sevastianov D., Sevastiynov P. Application of fuzzy sets theory methods for the evaluation of investment efficiency parameters // Fuzzy economic review. 2000. Vol. V. № 1. P. 77 – 87.
200	Dymova L., Sevastiynov P., Zestkova E. Multiobjective Evaluation of the Contract's Quality on the Base of the Fuzzy Sets Theory. VII Polish-Czech Mathe-

	mathematical School, Czestochova, 2000. P. 35 – 41.
201	Dymova Ludmila A constructive approach to managing fuzzy subsets of type 2 in decision making // Task quarterly. 2003. № 1. P. 157-164.
202	Emptoz Hubert Nonprobabilistic entropies and indetermination measures in the setting of fuzzy sets theory // Fuzzy Sets and Systems. 1981. V.5. № 3. P. 307 - 317.
203	Facchinetti G., Ricci R.G., Muzzioli S. Note on ranking fuzzy triangular numbers // International Journal of Intelligent Systems. 1998. № 13. P. 613-622.
204	Fishburn R. Utility Theory for Decision Making. New York: John Wiley and Sons., 1980. 354 p.
205	Fit R.-J. Propagating temporal constrains for scheduling. // Proc. Fifth National Conf. on AI (AAAI-86), 383-388. Morgan Kaufmann, Loa Atos, CA. 1986.
206	Fujiyoshi M., Shiraki T.A. A fuzzy automatic-combustion-control-system of refuse incineration plant // Proc. 2 nd Int'l Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. Iizuka, Japan. 1992. P. 469 – 472.
207	Geller NL, Stylianou M. Practical issues in data monitoring of clinical trails: summary of responses to a questionnaire at NIH // Statistics in Medicine. 1993. V.12. № 5-6. P. 543 - 551.
208	Godal R.C., Goodman T.J. Fuzzy sets and Borel // IEEE Tran. Syst. Man. and Cybern. 1980. V.10. №10. P. 637.
209	Golden B.L., Harker P.T., Wasil E.A. The Analytic Hierarchy Process-Application and Studies. New York: Springer-Verlag, 1989. – 239 p.
210	Gottwald S. Fuzzy Sets and fuzzy logic. Foundations and application from a mathematical point of view. Braunschweig, BRD: Vieweg Verlag, 1993. – 306 p.
211	Gupta N. M., Ragade R.K. Fuzzy sets theory and its applications: a survey // Multivariable Technol. Syst.Proc.4 th IFAC Int. Symp.1977. Oxford. 1978. P. 247 - 259.
212	Hagg C. Possibility and cost in decision analysis // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1. № 2. P. 81 – 86.
213	Hakata T., Masuda J. Fuzzy control of cooling system utilizing heat storage // Proc. Int'l Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. Iizuka, Japan. 1990. P. 77 – 80.

214	Hall W. Environmental Impact of Control, International Federation of Automatic Control // 6 th Triennial World Congress 24-30 Aug., Plenary papers IFAC 75. 1975. Boston. P. 122-135.
215	Hamacher H. Uber logische Verknupfungen unscharfer Aussagen und deren zugehörige Bewertungsfunktionen. W.R.Trappl, G.J.Klir i L.Ricciardi (pod red.): Progress in Cybernetics and Systems Research 3. Hemisphere, Washington. DC. s. 276 – 288.
216	Hanakuma Y. Ethylen plant distillation column button temperature control // Keisi. 1989. Vol. 32. № 8. P. 28 – 39.
217	Hannan E. Linear programming with multiple fuzzy goals // Fuzzy Sets and Systems. 1981. Vol. 6. № 3. P. 235 – 489.
218	Hansen E. A generalized interval arithmetic. //Interval Mathematics /Ed. by K. Nickel. Lecture Notes in Computer Science, 29. Berlin. Heidelberg: Springer-Verl., 1975. P. 7 – 18 p.
219	Hansen E.R. Sharpness in Interval Computations // Reliable Computing. 1997. V. 3. P. 17-29.
220	Hauke W. Using Yager's t-norms for aggregation of fuzzy intervals // Fuzzy Sets and Systems. 1999. V. 101. P. 59 – 65.
221	Heider H., Tryba V. Energiesparen durch einen adaptiven Fuzzy-Regler fur Heizungsanlagen // Proc. Conf. 4. Dortmunder Fuzzy-Tage. Dortmund, BRD. 1994. P. 282 – 288.
222	Heilpern S. Representation and application of fuzzy numbers // Fuzzy sets and Systems. 1997. № 91. P. 259-268.
223	Heilpern S. Using distance between fuzzy numbers in socio-economic systems. In R. Trapl (Ed.) Cybernetic and Systems. World Scientific, Singapur. 1994. P. 279-286.
224	Hisdal E. Generalized fuzzy set systems and particularization // Fuzzy Sets and Systems. 1980. Vol. 4. № 3. P. 275 – 291.
225	Hishida N. Development of the operator support system applying fuzzy algorithms for glass tube molding equipment // Proc. 2 nd Int'l Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. Iizuka, Japan. 1992. P. 1097 – 1100.
226	Hiyama T., Sameshima T. Fuzzy logic control scheme for an-line stabilization of

	multi-machine power system // Fuzzy Sets and Systems. 1991. Vol. 39. P. 181 – 194.
227	Hsieh L.H., Groth H.C. Fuzzy Sensordatenauswertung fur das automatisierte Entgraten // Proc. Conf. 4. Dortmunder Fuzzy - Tage. Dortmund, BRD. 1994. P. 173 – 180.
228	Hung T., Sugeno M., Tong R., Yager R.R. Theoretical aspects of fuzzy control. New York: John Wiley and Sons Inc., 1995. 267 p.
229	Ishihashi H., Tanaka M. Multiobjective programming in optimization of the Interval Objective Function // European Journal of Operational Research. 1990. № 48. P. 219-225.
230	Juhani V. Fuzzy expectation values in multistage optimization problem // Fuzzy Sets and Systems. 1981. V.6. № 2. P. 161 - 167.
231	Jumarie G. Relativistic fuzzy sets. Toward a new approach to subjectivity in human systems // Math. et. Sci. Hum. 1980. Vol. 18. № 71. P. 39 – 75.
232	Kacprzyk J. Multistage fuzzy control. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1997. 258 p.
233	Kacprzyk J. Zbiory rozmyte w analizie systemowej. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1986. 205 p.
234	Kacprzyk J., Fedrizzi M. Fuzzy regression analysis. Warszawa: Omnitech Press, Heidelberg: Physica-Verlag, 1992. 578 p.
235	Kahlert J. Fuzzy Control fur Ingenieure. Braunschweig, BRD: Vieweg Verlag, 1995. 308 p.
236	Kahlert J., Frank H. Fuzzy-Logic and Fuzzy-Control. Braunschweig, BRD: Vieweg Verlag, 1994. 184 p.
237	Kandel A., Langholz G. Fuzzy Control Systems. London: CRC Press, 1994. 258 p.
238	Karnik N.N., Mendel J.M.. Application of Type 2 Fuzzy Logic Systems to Forecasting of Time Series // Fuzzy Sets and Systems. 1999. V.120. P. 89-111.
239	Kaufmann A., Aluja J. Gil Introduccion de la teoria de los subconjuntos borrosos a la gestion de las empresas. Santiago de Compostela: Milladoiro, 1986. 198 p.
240	Kaufmann A., Gupta M. Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. 349 p.

241	Kawai H. Engine control system // Proc. Int'l Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. Iizuka, Japan. 1990. P. 929 – 973.
242	Kiendl H. Fuzzy Control methodenorientiert. Munchen, BRD: R. Oldenburg Verlag, 1997. 378 p.
243	Knappe H. Nichtlineare Regelungstechnik und Fuzzy Control. Renningen-Malmsheim, BRD: Expert Verlag, 1994. 198 p.
244	Knopfmacher J. On measures of fuzzyness // J. Mathematical Analysis and Applications. 1975. V. 49. P. 529 - 534.
245	Koch M., Kuhn Th., Wernstend J. Fuzzy Control. Munchen, BRD: R. Oldenburg Verlag, 1996. 498 p.
246	Kolios G., Aichele Ph., Nieken U., Eingenberger G. Regelung eines instationar betriebenen Festbettreaktors mit Fuzzy-Kontrollregeln // Proc. Int. Conf. 4. Dortmunder Fuzzy Tage. Dortmund, BRD. 1994. P. 429 – 436.
247	Krone A., Teuber P. Applying WINROSA for automatic generation of fuzzy rule bases // Proc. Int. Conf. EUFIT'96, Aachen. Germany. 1996. Vol. 2. P. 929 – 932.
248	Kruse R., Gebhard J., Klawonn F. Foundation of Fuzzy Systems. New York: John Wiley and Sons Inc., 1994. 407 p.
249	Kuhn T., Wernstend J. SOFCON – Eine Strategie zum optimalen Entwurf von Fuzzy-Regelungen // Automatisierungstechnik. 1994. V. 42. № 3. P. 91 – 99.
250	Kulpa Z. Diagrammatic representation for a space of intervals // Machine Graphics and Vision 6. 1997. № 1. P. 5 - 24.
251	Lanory Maurico, Malouin Jean-Louis Reflexions sur le probleme de la validation des modeles // Modelis et meitrise syst. Techn., econ., sociaux. Act. Congr. AFCET. Versailles. 1977. Vol. 1. P. 151 – 160.
252	Lave L., Seskin R. Air Pollution and Human Health //Science. 1970. Vol. 8. P. 67 – 80.
253	Lee K.C., Min S.S., Song J.W., Cho K.B. An adaptive fuzzy current controller with neural network for field-oriented controlled induction machine // Proc. 2 nd Int'l Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. Iizuka, Japan. 1992. P. 449 – 452.
254	Levins R. The Strategy of Model Building in Population Biology // American

	Scientist. 1966. Vol. 54. № 4. P. 426 – 431.
255	Loo S. G. Measures of fuzzynes // Cybernetica. 1977. V. 3. P. 201 - 210.
256	Luc Jaulin, Michel Kieffer, Olivier Didrit, Eric Walter. Applied interval analysis. London: Springer-Verlag, 2001.
257	Ludyk G. CAE von Dynamischen Systemen. Analyse, Simulation, Entwurf von Regelungssystemen. – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990. – 335 c.
258	Luus R., Jaakola T. Optimization by Direct Search and Systematic Reduction of Size of Search Region // AIChE J. 1973. № 19. P. 760-766.
259	Mamdani E. Application of Fuzzy Logic to Approximate Reasoning Using Linguistic Synthesis // IEEE Transaction on computers. 1977. № 12. P. 1182 - 1191.
260	Markov S.M. A non-standard substraction of intervals // Serdica. 1977. Vol. 3. P. 359 - 370.
261	Migdalas A., Pardalos P.M. Editorial: hierarchical and bilevel programming // J. Global Optimization. 1996. V. 8. № 3. P. 209 – 215.
262	Mitra G. Mathematical Models for Decision Support. Berlin: Springer, 1988. 267 p.
263	Mizumoto Masaharu, Tanaka Kokichi. Fuzzy sets and their operations // Inf. and Contr. 1981. V. 48. № 1. P. 30 - 48.
264	Mizumoto Masaharu, Tanaka Kokichi. Fuzzy sets type 2 under algebraic product and algebraic sum // Fuzzy Sets and Systems. 1981. V. 5. № 3. P. 277 - 290.
265	Moore R.E. Interval analysis. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966. 250 p.
266	Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. Philadelphia: SIAM, 1979. 349 p.
267	Morgan C., Pelletier F. Some notes concerning fuzzy logic's // Linguist. and Rhil. 1977. Vol. 1. № 1. P. 79 – 97.
268	Murakani S. Weld-line tracking control of arc welding robot using fuzzy logic controller // Fuzzy Sets and Systems. 1989. Vol. 32. P. 221 – 237.
269	Nahmios S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1. № 2. P. 97 – 110.
270	Naylir T., Finger J. Verification of Computer Simulation Models // Management Science. 1967. Vol. XIV. P. 92 – 101.
271	Negoita C. The current interest in fuzzy optimization // Fuzzy Sets and Systems.

	1981. Vol. 6. № 3. P. 261 – 269.
272	Nguyen T.H., Sugeno M., Tong R., Yager RR. Theoretical aspects of fuzzy control. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1995. 689 p.
273	Novak Vilem. An attempt at Godel – Bernays - like axiomatization of fuzzy sets // Fuzzy Sets and Systems. 1980. V.3. №3. P. 323 - 325.
274	Oguntade Olutemi O. Semantics and pragmatics of fuzzy sets and systems // Fuzzy Sets and Systems. 1981. V.6. № 2. P.119 - 143.
275	Ohnishi T. A self-learning fuzzy control system for an urban refuse incineration plant // Japanese Journal of Fuzzy Theory an Systems. 1991. Vol. 3. № 2. P. 187 – 200.
276	Pawlak Z. Rough relations // Pr. IPI PAN. 1981. № 435. P. 10.
277	Pieगत A. Modelowanie i sterowanie rozmyte. Warszawa, 2000. 678 p.
278	Pielou B. Mathematical ecology. N.Y.: Wiley, 1977. 385 p.
279	Pollatschik M.A. Hierarchical systems and fuzzy set theory // Cybernetes. 1977. V. 6. P. 147 - 151.
280	Ramesh J. A procedure for multiple-aspect decision making using fuzzy sets // Int. J. Syst. Sci. 1977. Vol. 8. № 1. P. 1 – 7.
281	Rehfeld D., Schmitz Th. Schweissprozessanalyse und Qualitätssicheruhg mit Fuzzy-Logic // Proc. Int. Conf. 4. Dortmunder Fuzzy-Tage. Dortmund, BRD. 1994. P. 189 – 197.
282	Rodler W. On «and» and «or» connectives in Fuzzy Set theory // Report Institute fur Wirtschaftswissenschaften. Aachen Gernay. 1975. № 75/07. 16 p.
283	Roffel B., Chin P.F. Fuzzy control of a polymerization reactor // Hydrocarbon Processing. 1991. № 6. P. 47 – 50.
284	Rommelfanger H. Fuzzy Decision Support-Systems. Munchen: Springer Verlag, 1994. 259 p.
285	Roubens M. Fuzzy sets and decision analysis // Fuzzy Sets and Systems. 1997. V. 90. P. 199-206.
286	Rutkowska D., Piliński M., Rutkowski L. Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte. Warszawa –Łódź: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1987. 534 p.
287	Saaty T. Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures // J. of Mathe-

	mathematical Psychology. 1977. Vol. 15. № 3. P. 234 – 281.
288	Saaty T., Thomas L. Decision Making for Leaders. Pittsburgh: RWS Publications, 1992. 243 p.
289	Saaty T., Thomas L. Multicriteria Decision Making. The Analytic Hierarchy Process. Pittsburgh: RWS Publications, 1992. 387 p.
290	Sancher E. Inverses of fuzzy relations. Application to possibility distributions and medical diagnosis // IEEE Conf. of Decision and Control: Proc. 1977. New Orleans. 1977. P. 1284 – 1389.
291	Sasaki T., Akiyama T. Traffic control process of expressway by fuzzy logic // Fuzzy Sets and Systems. 1988. Vol. 26. P. 165 – 178.
292	Sendov B. Some topics of segment analysis. // Interval Mathematics /Ed. by K. Nickel. N.Y.: Academic Press, 1980. P. 203 - 222.
293	Sevastianov P.V., Valkovsky V.I, Sevastianov D.P., Stepanov D.V. The method and software for financial and economic analysis in conditions of fuzzy and probabilistic uncertainty. Proc.of Fifth Int. Con. Computer Data Analysis and Modelling,.Vol 2. Minsk, 1998. P. 93 – 98.
294	Sevastjanov Pavel V., Rog Pawel, Venberg Andrej V. A Constructive Numerical Method for the Comparison of Intervals // Parallel Processing and Applied Mathematics. 4th International Conference. PPAM 2001. Naleczow, Poland, September 2001, Revised Papers. 2001. P. 756-761.
295	Sevastjanov Pavel V., Rog Pawel, A probabilistic approach to fuzzy and crisp interval ordering // Task quarterly. 7. № 1. 2003. P. 147-156.
296	Sewastjanow P., Koszkuł M., Rog P.. Modelowanie procesów produkcyjnych w warunkach niepewności rozmytego typu // Informatyka teoretyczna i stosowana. T. 1. № 1. 2001. c. 89-94.
297	Sewastjanow P., Koszkuł M., Rog P. Metoda symulacji w warunkach niepewności rozmytego typu // III Krajowa Konferencja «Metody i systemy komputerowe w badaniach naukowych i projektowaniu inżynierskim». Kraków, 19 - 26 listopada 2001. P.141 - 142.
298	Sevastianow P., Rog P. Fuzzy modeling of manufacturing and logistic systems // Mathematics and Computers in Simulation. 2003. 63. P. 569-585.
299	Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton: Princeton University

	Press, 1976. 297 p.
300	Shih H.-S. Lee E.S. Compensatory fuzzy multiple level decision making // Fuzzy Sets and Systems. 2000. V. 114. P. 71 – 87.
301	Tanaka Hideo, Asai Kiyaii. Fuzzy linear programming based on fuzzy functions //Bull. Univ. Osaka Prefect. 1980. Vol. 29. № 2. P. 113 – 125.
302	Thole U., Zimmermann H.J., Zysno P. On the suitability of minimum and product operators for the intersection of fuzzy sets // Fuzzy Sets and Systems. 1979. V.2. № 2. P. 167 - 180.
303	Tilli T. Fuzzy-Logik. Munchen, BRD: Franzis Verlag, 1991. 349 p.
304	Tobi T., Hanafusa T. A practical application of fuzzy control for an airconditioning system // International Journal of Approximate Reasoning. 1991. № 5. P. 331 – 348.
305	Tong R., Bonissone P. A linguistic approach to decision-making with fuzzy sets // IEEE Trans. Syst. Mang. and Cybern. 1980. Vol. 10. № 11. P. 716 – 723.
306	Tong R.M. A control engineering review of fuzzy systems//Automatic. 1977 V. 3. P.47-61.
307	Voit F. Fuzzy Control versus konventionelle Regelung am Beispiel der Metro Mailand // Automatisierungstechnik. 1994. Vol. 42. № 9. P. 400 – 410.
308	Walster G.W., Bierman M.S. Interval Arithmetic in Forte Developer Fortran // Technical Report. Sun Microsystems. March 2000. P. 35-43.
309	Wang L.X. Adaptive fuzzy systems and control, design and stability analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1994. 274 p.
310	Wang X. Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I), (II) // Fuzzy Sets and Systems. 2001. № 122. P. 375-385, 387-405.
311	Watanabe S. A generalized fuzzy set theory // IEEE Trans. Syst., Man. and Cybern. 1978. Vol. 8. № 10. P. 756 – 763.
312	Watanabe T. AI and fuzzy-based tunnel ventilation control system // Proc. Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. Iizuka, Japan. 1990. P. 71 – 75.
313	Weber S. A general concept of fuzzy connectives, negation and implication based on t -norms and t -conorms // Fuzzy Sets and Systems. 1983. 11. P. 115 – 134.
314	Weidner A. Fuzzy sets and Boolean-valued universes // Fuzzy Sets and Systems.

	1981. Vol. 6. № 1. P. 61 – 72.
315	Wicar - Whilan P.J. Fuzzy logic an alternative approach // Proc. 9th Int. Symp. Multiple-Valued Log. 1979. New York. 1979. P. 152 – 158.
316	William N. Rom. Environmental and Occupational Medicine. Second Edition. Boston - Toronto – London: Little: Brown and Company, 1992. 1493 p.
317	Wittgenstein L. Tractatus Logico Philosophicus. London: Routlege and Kegan Paul, 1922. 256 p.
318	Yager R. A foundation for a theory of possibility // J. of Cybernetics. 1980. Vol. 10. №.1-3. P. 177 - 209.
319	Yager R. A measurement - informational discussion of fuzzy union and intersection // Intern. Journal of Man-Machine Studies. 1979. V. 11. P. 189 - 200.
320	Yager R. A note on probabilities of fuzzy events // Information Sciences. 1979. V. 18. P.113 – 129.
321	Yager R. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval // Information Sciences. 1981. № 24, P. 143-161.
322	Yager R. Aspects of possibilistic uncertainty // Int. J. Man-Mach. Stud. 1980. Vol. 12. № 3. P. 283 – 298.
323	Yager R. Fuzzy decision making including unequal objectives // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1. № 2. P. 87 – 95.
324	Yager R. Fuzzy Sets, probabilistic and decision // J. Cybern. 1980. V. 10. № 1 - 3. P.1 - 18.
325	Yager R. Fuzzy subsets of type II in decisions // J. Cybern. 1980 V.10. № 1-3. P. 137 - 159.
326	Yager R. Multiple objective decision-making using fuzzy sets // Int. J. Man-Mach. Sfud. 1979. Vol. 9. № 4. P. 375 382.
327	Yager R. On general class of fuzzy connectives // Fuzzy Sets and Systems. 1980. V. 4. № 3. P. 235 - 242.
328	Yager R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making // IEEE Trans. Systems Man and Cybern. 1988. V. 18. № 1.P. 183 – 190.
329	Yager R. On ranking fuzzy numbers using valuations // International Journal of Intelligent Systems. 1999. № 14. P. 1249-1268.

330	Yager R. On the measure of fuzziness and Negation. Part 1. Membership in the Unit Interval // Int. J. Gen. Systems. 1979. V. 5. № 4. P. 221 - 229.
331	Yager R., Detyniecki V., Bouchon-Meunier B. A context-dependent method for ordering fuzzy numbers using probabilities // Information Sciences. 2001. V. 138. P. 237-255.
332	Yager R., Filev D. Essentials of fuzzy modeling and control. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1994. 632 p.
333	Yager R., Filev D. Podstawy modelowania i sterowania rozmytego. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe-Techniczne, 1985. 476 p.
334	Yager R., Detyniecki M. Ranking fuzzy numbers using α -weighted valuations // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems. 2000. № 8. P. 573-591.
335	Yen John, Langari Reza. Fuzzy Logic. New Jersey: Prentice Hall, 1998. 548 p.
336	Zade L.A. Outline of new approach to analyses of complex systems and decision processes // IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics. 1973. V.3. P. 28 - 44.
337	Zadeh L.A. Fuzzy algorithms // Information and Control. 1968. V.12. P. 94 - 102.
338	Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. V.8. P. 338 - 353.
339	Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1. № 1. P. 3 - 28.
340	Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility: Memorandum N VCB/ERL M 77/12. Berkeley: Univ. California, 1977. 3 p.
341	Zadeh L.A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes // IEEE Trans. Systems Man Cybernetics. 1973. V. 3. № 1. P. 28 - 44.
342	Zadeh L.A. Possibility theory versus probability theory in decision analysis // IEEE Conf. of Decision and Control: Proc. 1977. New Orleans. 1977. P. 1267 - 1269.
343	Zadeh L.A. Probability Measures of Fuzzy Events // J. Math. Anal. and Appl. 1968. V. 23. № 2 P. 421 - 427.
344	Zadeh L.A. Quantitative fuzzy semantics // Information Sciences. 1971. V.3. P.

	159-176.
345	Zimmerman H.J., Zysno P. Latent connectives in human decision making // Fuzzy Sets and Systems. 1980. V. 4. P. 37 - 51.
346	Zimmerman H.J., Zysno P. Decision and evaluations by hierarchical aggregation of information // Fuzzy Sets and Systems. 1983. V.104. P. 243 – 260.
347	Zimmermann H.J. Fuzzy set theory and its applications. London: Kluwer Academic Publishers, 1994. 763 p.
348	Zimmermann H.J. Fuzzy Sets, Decision-Making and Expert Systems. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1987. 352 p.
349	Zollo G., Iandoli L., Cannavacciuolo A. The performance requirements analysis with fuzzy logic // Fuzzy economic review. 1999, Vol. IV, № 1, P. 35-69.